

KOMBINATORIKA

Obsah:

(kombinatorické) pravidlo súčtu, (kombinatorické) pravidlo súčinu, permutácie, variácie a variácie s opakovaním, kombinácie, faktoriál, rovnice a nerovnice s faktoriálmi, kombinačné číslo, vlastnosti kombinačných čísel, rovnice a nerovnice s kombinačnými číslami, Pascalov trojuholník, binomická veta, vypisovanie možností

• Odvodte vzorec pre výpočet počtu uhlopriečok v konvexnom n -uholníku.

• Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}, n > 8$ platí $\binom{n}{n-7} + \binom{n}{n-8} + \binom{n+1}{n-8} = \binom{n+2}{n-7}$

Príklady:

1. Umocnením $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ dostaneme výraz $Ax^6 + Bx^4 + Cx^2 + D + \frac{E}{x^2} + \frac{F}{x^4} + \frac{G}{x^6}$. Ktoré z nasledujúcich čísel je

hodnota D ? (C)

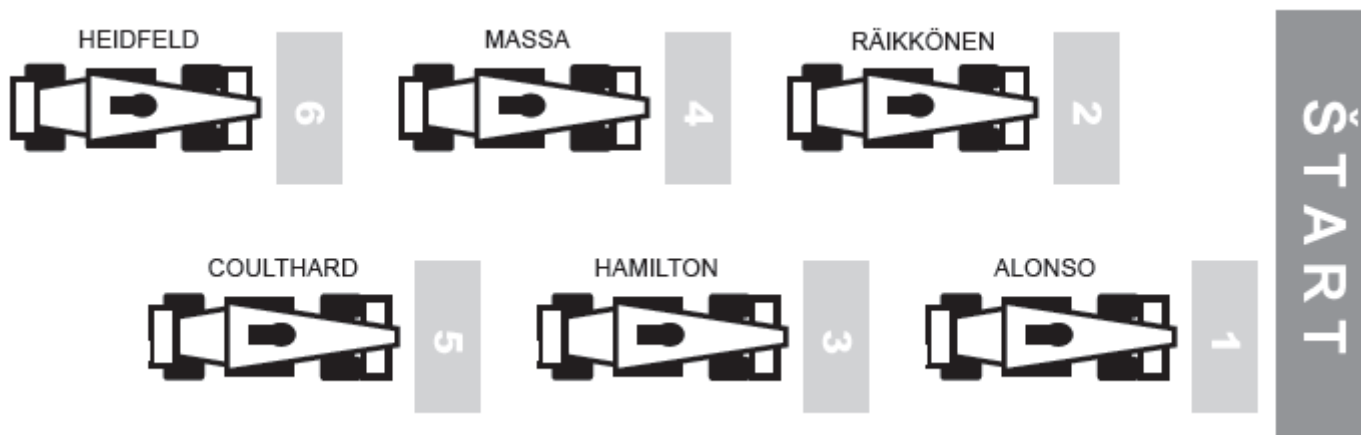
(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

2. Koľkými spôsobmi môžeme rozdeliť medzi Janu a Vieru 40 dvojkorunových mincí tak, aby každá z nich dostala aspoň 20 korún? (21)

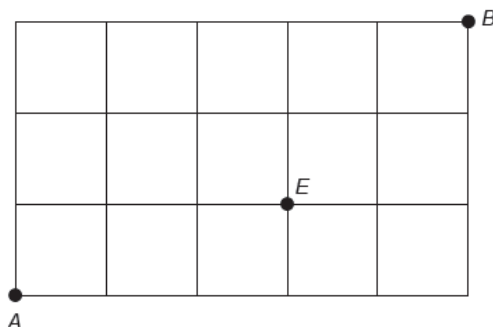
3. Určte počet všetkých sedemciferných prirodzených čísel, ktorých prvé štyri číslice sú nepárne a ďalšie tri číslice sú párne. (78 125)

4. V kúzelníckom vrečku je 5 rovnakých bielych a 2 rovnaké čierne guľôčky. Koľkými spôsobmi je možné vybrať z vrečka 3 guľôčky tak, aby boli 2 biele a 1 čierna? (20)

5. Na obrázku je znázornené štartové poradie na prvých šiestich miestach pretekov Formuly 1. V ďalších pretekoch štartovali z prvých šiestich miest tí istí pretekári. Räikkönen a Coulthard štartovali z toho istého miesta, všetci ostatní si zmenili štartové umiestnenie. Massa si vybojoval lepšiu štartovú pozíciu a súčasne si Alonso zhoršil svoju štartovú pozíciu. Koľko rôznych štartových poradí na prvých šiestich miestach mohlo byť v ďalších pretekoch? (6)



6. Koľko existuje rôznych najkratších ciest z bodu A do bodu B cez bod E, ak cesta môže ísť len po stranách štvorcov? (24)



7. Desiat futbalových mužstiev hralo na turnaji systémom práve raz každý s každým. Priemerne koľko gólov padlo v jednom zápase, ak počas celého turnaja hráči strelili 135 gólov? (3)

8. Ako treba zvoliť prirodzené číslo n , aby sme umocnením $(1+x)^n$ dostali polynóm, v ktorom koeficient kvadratického člena (koeficient pri x^2) je 300? (25)

9. Koľko rôznych kombinácií môžeme nastaviť na dierkovači cestovných lístkov, ak dierkovač vydierkuje štyri alebo päť z čísl 1 až 9? (252)

10. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n , pre ktoré platí $\binom{10\,000}{n} = \binom{10\,000}{9\,996}$. (4)

11. Aký tvar má šiesty člen rozvoja výrazu $(2x + y^2)^9$? $\left(\binom{9}{5}(2x)^4 y^{10}\right)$

12. Ktorý z uvedených dvojčlenov obsahuje vo svojom binomickom rozvoji člen $\binom{7}{3}x^5$? (d))

a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^7$ b) $(x + 1)^7$ c) $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^7$ d) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^7$

13. Upravte výraz $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} - 2\binom{n}{n-2}$. (2n)

14. Pre všetky prirodzené čísla n platí: $\frac{1}{n!} - \frac{3}{(n+1)!} - \frac{n^2-4}{(n+2)!} = ?$ (0)

15. Rovnica $\frac{(n-1)!}{2(n-3)!} - n = 19$ má v množine prirodzených čísel

a) jediný koreň, pričom $n_1 \leq 4$
b) jediný koreň, pričom $n_1 \geq 5$
c) práve dva korene n_1, n_2 , pričom $n_1 \cdot n_2 \leq 4$
d) práve dva korene n_1, n_2 , pričom $n_1 \cdot n_2 \geq 5$. (b))

16. Rovnica $\binom{m}{2} \cdot \binom{m}{m-2} - 16\binom{m}{2} + 60 = 0$ v množine prirodzených čísel

a) nemá koreň
b) má práve dva korene, pričom ich súčet je 9
c) má práve dva korene, pričom ich súčet je 16
d) má jediný koreň. (b))

17. $\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \binom{k+3}{3} = ? \left(\binom{k+4}{3}\right)$

18. Ktoré z uvedených kombinačných čísel je najväčšie? (d))

a) $\binom{1999}{1000}$ b) $\binom{2000}{1000}$ c) $\binom{2001}{2000}$ d) $\binom{2001}{1001}$

19. Pre dve kladné celé čísla c, d platí $\binom{300}{80} = \binom{c}{220}$ a $\binom{300}{60} = \binom{300}{60+d}$. Čomu sa rovná súčet $c + d$? (480)

1	2	3
4	5	6
7	8	9
BUS		

20. Koľkými spôsobmi môžeme na obrázku prečítať slovo MATEMATIKA? (2⁹)

M A T E M A T I K A
A T E M A T I K A
T E M A T I K A
E M A T I K A
M A T I K A
A T I K A
T I K A
I K A
K A
A

21. Koľko čísel spomedzi čísel 1, 2, 3, ..., 299, 300 nie je deliteľných ani dvoma ani tromi? (100)

22. V dostihovom preteku *O zlatú podkovu* nebolo ľahké tipovať výsledné poradie. Existovalo až 60 rôznych možností, ako mohlo vyzeráť poradie na prvých troch miestach. Koľko koní sa zúčastnilo na tomto preteku? (5)

23. V rovine sú dané dve rovnobežné priamky p , q . Na priamke p ležia body $P_1, P_2, \dots, P_8$. Na priamke q ležia body $Q_1, Q_2, \dots, Q_5$. Koľko existuje trojuholníkov, ktoré majú vrcholy v uvedených bodoch? $\left(\binom{8}{2} \cdot 5 + \binom{5}{2} \cdot 8\right)$

24. Nazvime prirodzené číslo „pozoruhodným“, ak má súčasne týchto 5 vlastností:

V_1 : je päťciferné

V_2 : je väčšie ako 20 000

V_3 : je deliteľné piatimi

V_4 : neobsahuje číslice 0, 4, 7, 9

V_5 : všetky jeho číslice sú rôzne.

Koľko je všetkých „pozoruhodných“ čísel? (96)

25. Na večierku sa zišlo niekoľko hostí, medzi ktorými bolo rovnako veľa mužov a žien. Najskôr si hostia chceli podať ruky každý s každým – to by však bolo príliš veľa podaní. Preto si podali ruky iba všetci muži navzájom a všetky ženy navzájom. Tým sa ušetrilo 36 podaní. Koľko osôb sa zúčastnilo večierku? (12)