

18. Kombinatorika a binomická veta

18.1 Faktoriál čísla - $n!$

1. Vypočítajte:

a) $2!+0!$ b) $2 \cdot 2!+(2^2)!+(2!)^2$ c) $3!+(3!)!$

a) $2!+0! = 2 \cdot 1 + 1 = \underline{3}$

b) $2 \cdot 2!+(2^2)!+(2!)^2 = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4!+(2 \cdot 1)^2 = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2^2 = 4 + 24 + 4 = \underline{32}$

c) $3!+(3!)! = 3 \cdot 2 \cdot 1 + (3 \cdot 2 \cdot 1)! = 6 + 6! = 6 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 + 720 = \underline{726}$

2. Vypočítajte:

a) $\frac{8!}{4!}$ b) $\frac{8!}{4!+4!}$ c) $\frac{8!}{4! \cdot 4!}$ d) $\frac{8!}{4 \cdot 4!}$

a) $\frac{8!}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \underline{1680}$

b) $\frac{8!}{4!+4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{35}$

c) $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 2 \cdot 5 = \underline{70}$

d) $\frac{8!}{4 \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4} = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \underline{420}$

3. Zjednodušte:

a) $\frac{2! \cdot 5! \cdot 6!}{7! \cdot 4! \cdot 3!}$

b) $\frac{28! + 29!}{30!}$

c) $\frac{7 \cdot 7! + 6 \cdot 6!}{6 \cdot 7! - 7 \cdot 6!}$

a) $\frac{2! \cdot 5! \cdot 6!}{7! \cdot 4! \cdot 3!} = \frac{2! \cdot 5 \cdot 4! \cdot 6!}{7 \cdot 6! \cdot 4! \cdot 3 \cdot 2!} = \frac{5}{7 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{5}{21}}}$

b) $\frac{28! + 29!}{30!} = \frac{28!(1 + 29)}{30 \cdot 29 \cdot 28!} = \underline{\underline{\frac{1}{29}}}$

c) $\frac{7 \cdot 7! + 6 \cdot 6!}{6 \cdot 7! - 7 \cdot 6!} = \frac{6!(7 \cdot 7 + 6)}{6!(6 \cdot 7 - 7)} = \frac{55}{35} = \underline{\underline{\frac{11}{7}}}$

4. Upravte na spoločného menovateľa:

a) $\frac{1}{12!} + \frac{7}{13!}$

b) $\frac{1}{15!} - \frac{15}{16!}$

c) $\frac{3}{5!} - \frac{20}{7!} + \frac{2}{6!}$

a) $\frac{1}{12!} + \frac{7}{13!} = \frac{13 + 7}{13!} = \underline{\underline{\frac{20}{13!}}}$

b) $\frac{1}{15!} - \frac{15}{16!} = \frac{16 - 15}{16!} = \underline{\underline{\frac{1}{16!}}}$

c) $\frac{3}{5!} - \frac{20}{7!} + \frac{2}{6!} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 6 - 20 + 2 \cdot 7}{7!} = \underline{\underline{\frac{1}{42}}}$

5. Krát'te a určte podmienky pre n :

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{(n+1)!}{n!} & \text{c)} \frac{(n+1)!}{(n-1)!} & \text{e)} \frac{(n+4)!}{(n+2)!} & \text{g)} \frac{(2n)!}{(2n-1)!} \\ \text{b)} \frac{n!}{(n-2)!} & \text{d)} \frac{(n-100)!}{(n-99)!} & \text{f)} \frac{(n-4)!}{(n-2)!} & \text{h)} \frac{(3n-2)!}{(3n-3)!} \end{array}$$

$$\text{a)} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{n!} = \underline{n+1}, \text{ kde } n \geq 0$$

$$\text{b)} \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = \underline{n \cdot (n-1)}, \text{ kde } n \geq 2$$

$$\text{c)} \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = \underline{(n+1) \cdot n}, \text{ kde } n \geq 1$$

$$\text{d)} \frac{(n-100)!}{(n-99)!} = \frac{(n-100)!}{(n-99) \cdot (n-100)!} = \underline{\frac{1}{n-99}}, \text{ kde } n \geq 100$$

$$\text{e)} \frac{(n+4)!}{(n+2)!} = \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)!}{(n+2)!} = \underline{(n+4) \cdot (n+3)}, \text{ kde } n \geq -2$$

$$\text{f)} \frac{(n-4)!}{(n-2)!} = \frac{(n-4)!}{(n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)!} = \underline{\frac{1}{(n-2) \cdot (n-3)}}, \text{ kde } n \geq 4$$

$$\text{g)} \frac{(2n)!}{(2n-1)!} = \frac{2n \cdot (2n-1)!}{(2n-1)!} = \underline{2n}, \text{ kde } n \geq 1$$

$$\text{h)} \frac{(3n-2)!}{(3n-3)!} = \frac{(3n-2) \cdot (3n-3)!}{(3n-3)!} = \underline{3n-2}, \text{ kde } n \geq 1$$

6. Upravte, určte podmienky pre n :

a) $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$

c) $2 \cdot \frac{n^2 - 16}{(n+4)!} + \frac{n^2 + 5}{(n+3)!} + \frac{3}{(n+2)!}$

b) $\frac{n}{(n-3)!} - \frac{1}{(n-4)!}$

d) $\frac{2}{n!} - \frac{2n}{(n+1)!} - \frac{2n+4}{(n+2)!}$

a) $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$, kde $n \geq 0$

b) $\frac{n}{(n-3)!} - \frac{1}{(n-4)!} = \frac{n-(n-3)}{(n-3)!} = \frac{3}{(n-3)!}$, kde $n \geq 4$

c) $2 \cdot \frac{n^2 - 16}{(n+4)!} + \frac{n^2 + 5}{(n+3)!} + \frac{3}{(n+2)!} = \frac{(n+4) \cdot [2 \cdot (n-4) + (n^2 + 5) + 3 \cdot (n+3)]}{(n+4) \cdot (n+3)!} =$
 $\frac{2 \cdot (n-4) + (n^2 + 5) + 3 \cdot (n+3)}{(n+3)!} = \frac{n^2 + n + 6}{(n+3)!}$, kde $n \geq -2$

d) $\frac{2}{n!} - \frac{2n}{(n+1)!} - \frac{2n+4}{(n+2)!} = \frac{2 \cdot (n+2) \cdot (n+1) - 2n \cdot (n+2) - (2n+4)}{(n+2)!} = 0$

7. Upravte, určte podmienky pre n :

a) $\frac{(n-1)!}{3n!} + \frac{n!}{4(n+1)!}$

c) $\frac{(n+5)!}{(n+3)!} - 2 \cdot \frac{(n+4)!}{(n+2)!} + \frac{(n+3)!}{(n+1)!}$

b) $\frac{(n-1)!}{3n!} \cdot \frac{n!}{4(n+1)!}$

d) $\frac{(n+1)!}{n!} + 4 \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!} - \frac{9n!}{(n-1)!}$

a) $\frac{(n-1)!}{3n!} + \frac{n!}{4(n+1)!} = \frac{(n-1)!}{3 \cdot n \cdot (n-1)!} + \frac{n!}{4 \cdot (n+1) \cdot n!} = \frac{1}{3n} + \frac{1}{4(n+1)}$

b) $\frac{(n-1)!}{3n!} \cdot \frac{n!}{4(n+1)!} = \frac{(n-1)!}{3 \cdot n \cdot (n-1)!} \cdot \frac{n!}{4 \cdot (n+1) \cdot n!} = \frac{1}{3n} \cdot \frac{1}{4(n+1)}$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & \frac{(n+5)!}{(n+3)!} - 2 \frac{(n+4)!}{(n+2)!} + \frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \\
 & = \frac{(n+5) \cdot (n+4) \cdot (n+3)!}{(n+3)!} - 2 \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)!}{(n+2)!} + \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!}{(n+1)!} = \\
 & = (n+5) \cdot (n+4) - 2 \cdot (n+4) \cdot (n+3) + (n+3) \cdot (n+2) = \underline{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \frac{(n+1)!}{n!} + 4 \frac{(n+1)!}{(n-1)!} - \frac{9n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} + 4 \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} - \frac{9n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} =$$

8. Rozhodnite, ktoré z čísiel A a B je väčšie:

$$\text{a) } A = 70! + 73!$$

$$\text{b) } A = n! + (n+3)!$$

$$B = 71! + 72!$$

$$B = (n+1)! + (n+2)!$$

$$\text{a) } A = 70! + 73! = 70!(1 + 73 \cdot 72 \cdot 71)$$

$$B = 71! + 72! = 70! \cdot 71 \cdot (1 + 72) = 70! \cdot 71 \cdot 73 \Rightarrow \underline{A > B}$$

$$\text{b) } A = n! + (n+3)! = n! [1 + (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)]$$

$$B = (n+1)! + (n+2)! = n! \cdot (n+1) \cdot (1 + n+2) = n! \cdot (n+1) \cdot (n+3) \Rightarrow \underline{A > B}$$

9. Dokážte, že platí:

$$\text{a) } \frac{1000! + 1003!}{1001! + 1002!} > 1$$

$$\text{b) } \frac{1004! - 1002!}{1005! - 1003!} < 1$$

$$\text{a) } \frac{1000! + 1003!}{1001! + 1002!} > 1$$

$$\frac{1000! + 1003!}{1001! + 1002!} = \frac{1000! (1 + 1003 \cdot 1002 \cdot 1001)}{1000! \cdot 1001 \cdot (1 + 1002)} = \frac{1 + 1003 \cdot 1002 \cdot 1001}{1001 \cdot 1003} > 1$$

$$\text{b) } \frac{1004! - 1002!}{1005! - 1003!} < 1$$

$$\frac{1004! - 1002!}{1005! - 1003!} = \frac{1002! \cdot (1004 \cdot 1003 - 1)}{1002! \cdot 1003 \cdot (1005 \cdot 1004 - 1)} = \frac{1004 \cdot 1003 - 1}{1003 \cdot (1005 \cdot 1004 - 1)} < 1$$

10. a) Koľkými nulami končí číslo $50!$?

b) Koľkými nulami končí číslo $100!$?

c) Koľkými nulami končí číslo $500!$?

11. Dokážte, že platí:

$$\text{a) } \forall n \in \mathbf{Z}, n \geq 0: (n+1)! - n! = n \cdot n!$$

$$\text{b) } \forall n \in \mathbf{Z}, n \geq -2: (n+2)! + (n+3)! + (n+4)! = (n+2)! \cdot (n+4)^2$$

$$\text{c) } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 4: (n-2)! + (n-3)! + (n-4)! = (n-4)! \cdot (n-2)^2$$

$$\text{d) } \forall n \in \mathbf{N}: n! \cdot (n+1) + n \cdot (n-1)! - (n-1)! \cdot (n^2 + n) = n!$$

$$\text{e) } \forall n \in \mathbf{Z}, n \geq 0: (n+1)^2 \cdot (n!)^2 - [(n+1)!]^2 = 0$$

$$\text{a) } \forall n \in \mathbf{Z}, n \geq 0: (n+1)! - n! = n \cdot n!$$

$$(n+1) \cdot n! - n! = n \cdot n!$$

$$n! \cdot [(n+1) - 1] = n \cdot n!$$

$$n \cdot n! = n \cdot n!$$

$$\underline{1=1}$$

$$\text{b) } \forall n \in \mathbf{Z}, n \geq -2: (n+2)! + (n+3)! + (n+4)! = (n+2)! \cdot (n+4)^2$$

$$(n+2)! + (n+3) \cdot (n+2)! + (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)! = (n+2)! \cdot (n+4)^2$$

$$(n+2)! \cdot [1 + (n+3) + (n+4) \cdot (n+3)] = (n+2)! \cdot (n+4)^2$$

$$1 + n + 3 + n^2 + 7n + 12 = (n+4)^2$$

$$n^2 + 8n + 16 = (n+4)^2$$

$$(n+4)^2 = (n+4)^2$$

$$\underline{1=1}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 4: & (n-2)! + (n-3)! + (n-4)! = (n-4)! \cdot (n-2)^2 \\
& (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)! + (n-3) \cdot (n-4)! + (n-4)! = (n-4)! \cdot (n-2)^2 \\
& (n-4)! \cdot [(n-2) \cdot (n-3) + (n-3) + 1] = (n-4)! \cdot (n-2)^2 \\
& (n-2) \cdot (n-3) + (n-3) + 1 = (n-2)^2 \\
& n^2 - 5n + 6 + n - 3 + 1 = (n-2)^2 \\
& n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2 \\
& (n-2)^2 = (n-2)^2 \\
& \underline{1=1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \forall n \in \mathbf{N}: & n! \cdot (n+1) + n \cdot (n-1)! - (n-1)! \cdot (n^2 + n) = n! \\
& n! \cdot (n+1) + n! - n \cdot (n-1)! \cdot (n+1) = n! \\
& n! \cdot [(n+1) + 1 - (n+1)] = n! \\
& \underline{1=1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } \forall n \in \mathbf{Z}, n \geq 0: & (n+1)^2 \cdot (n!)^2 - [(n+1)!]^2 = 0 \\
& (n+1)^2 \cdot (n!)^2 - [(n+1) \cdot n!]^2 = 0 \\
& (n+1)^2 \cdot (n!)^2 - (n+1)^2 \cdot (n!)^2 = 0 \\
& \underline{0=0}
\end{aligned}$$

12. Riešte rovnice s neznámou $n \in \mathbf{Z}$:

- a) $5 \cdot (n+1)! = (n+2)!$
- b) $(n+2)! \cdot n! = 24 \cdot (n+1)! \cdot (n-1)!$
- c) $(n+1)! - 16 \cdot (n-1)! = n!$
- d) $(n-90)! + 4 \cdot (n-91)! = (n-89)!$

$$\begin{aligned}
\text{a) } & 5 \cdot (n+1)! = (n+2)! \\
& 5 \cdot (n+1)! = (n+2) \cdot (n+1)! \\
& 5 = n+2 \\
& \underline{n=3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (n+2)! \cdot n! &= 24 \cdot (n+1)! \cdot (n-1)! \\
 (n+2) \cdot (n+1)! \cdot n \cdot (n-1)! &= 24 \cdot (n+1)! \cdot (n-1)! \\
 (n+2) \cdot n &= 24 \\
 n^2 + 2n - 24 &= 0 \\
 n_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ -6 \end{array} \right\rangle \\
 \underline{n = 4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } (n+1)! - 16 \cdot (n-1)! &= n! \\
 (n+1)! - 16 \cdot (n-1)! &= n! \\
 (n+1) \cdot n \cdot (n-1)! - 16 \cdot (n-1)! &= n \cdot (n-1)! \\
 (n+1) \cdot n - 16 &= n \\
 n^2 + n - 16 - n &= 0 \\
 n^2 &= 16 \\
 \underline{n = 4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } (n-90)! + 4 \cdot (n-91)! &= (n-89)! \\
 (n-90) \cdot (n-91)! + 4 \cdot (n-91)! &= (n-89) \cdot (n-90) \cdot (n-91)! \\
 (n-90) + 4 &= (n-89) \cdot (n-90) \\
 n - 90 + 4 &= n^2 - 179n + 8010 \\
 n^2 - 180n + 8096 &= 0 \\
 n_{1,2} &= \frac{180 \pm \sqrt{32400 - 32384}}{2} = 90 \pm 2 = \left\langle \begin{array}{l} 92 \\ 88 \end{array} \right\rangle \\
 \underline{n = 92}
 \end{aligned}$$

13. Riešte rovnice s neznámou $n \in \mathbf{Z}$:

$$\text{a) } \frac{n!}{(n-2)!} = 4n$$

$$\text{b) } \frac{10-17n}{(n+1)!} + \frac{4}{(n-1)!} = 0$$

$$\text{c) } \frac{(n+6)!}{(n+4)!} - n \cdot \frac{(n-4)!}{(n-5)!} = 5n + 80$$

$$\text{d) } \frac{(2n+1)!}{(2n)!} + \frac{(3n)!}{(3n-1)!} = \frac{(n+1)!}{2n!} + 50$$

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \frac{n!}{(n-2)!} = 4n \\
 & \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = 4n \\
 & n \cdot (n-1) = 4n \\
 & n^2 - n - 4n = 0 \\
 & n^2 - 5n = 0 \\
 & \underline{n = 5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \frac{10-17n}{(n+1)!} + \frac{4}{(n-1)!} = 0 \\
 & \frac{10-17n}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!} + \frac{4}{(n-1)!} = 0 \\
 & \frac{10-17n}{(n+1) \cdot n} + 4 = 0 \\
 & 10-17n+4 \cdot n \cdot (n+1) = 0 \\
 & 4n^2 - 13n + 10 = 0 \\
 & n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10}}{2 \cdot 4} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ 5/4 \end{array} \right\rangle \\
 & \underline{n = 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & \frac{(n+6)!}{(n+4)!} - n \cdot \frac{(n-4)!}{(n-5)!} = 5n + 80 \\
 & (n+6) \cdot (n+5) - n \cdot (n-4) = 5n + 80 \\
 & n^2 + 11n + 30 - n^2 + 4n = 5n + 80 \\
 & \underline{n = 5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & \frac{(2n+1)!}{(2n)!} + \frac{(3n)!}{(3n-1)!} = \frac{(n+1)!}{2n!} + 50 \\
 & 2n+1+3n = \frac{n+1}{2} + 50 \\
 & 10n+2 = n+1+100 \\
 & 9n = 99 \\
 & \underline{n = 11}
 \end{aligned}$$

14. Riešte nerovnice s neznámou $n \in \mathbf{Z}$:

a) $72n! < (n+2)!$

b) $(n+2)!(24+6n) \leq (n+4)!$

c) $(n+1)! + (n+2)! \leq (n+3)!$

d) $(n-2)! + 5 \cdot (n-4)! \geq n \cdot (n-4)!$

a) $72n! < (n+2)!$

$$72n! < (n+2) \cdot (n+1) \cdot n!$$

$$72 < (n+2) \cdot (n+1)$$

$$0 < n^2 + 3n - 70$$

$$n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+280}}{2} = \begin{cases} 7 \\ -10 \end{cases}$$

$$\underline{n = 7, 8, 9, \dots}$$

b) $(n+2)!(24+6n) \leq (n+4)!$

$$(n+2)!(24+6n) \leq (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)!$$

$$24+6n \leq (n+4) \cdot (n+3)$$

$$24+6n \leq n^2 + 7n + 12$$

$$0 \leq n^2 + n - 12$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$$\underline{n = 3, 4, 5, \dots}$$

c) $(n+1)! + (n+2)! \leq (n+3)!$

$$(n+1)!(1+n+2) \leq (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!$$

$$n+3 \leq (n+3) \cdot (n+2)$$

$$0 \leq n+2$$

$$-2 \leq n$$

$$\underline{n = -1, 0, 1, 2, 3, \dots}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } & (n-2)! + 5 \cdot (n-4)! \geq n \cdot (n-4)! \\
& (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)! + 5 \cdot (n-4)! \geq n \cdot (n-4)! \\
& (n-2) \cdot (n-3) + 5 \geq n \\
& n^2 - 6n + 11 \geq 0 \\
& n_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 44}}{2} \Rightarrow D < 0 \\
& \underline{n = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots}
\end{aligned}$$

15. Riešte nerovnice s neznámou $n \in \mathbf{Z}$:

$$\text{a) } \frac{n!}{(n-2)!} + 24 \geq 10n$$

$$\text{c) } 3 \frac{(n+4)!}{(n+2)!} - 22n \leq 46$$

$$\text{b) } n - \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \geq -1$$

$$\text{d) } \frac{n!}{(n-2)!} - 3n \leq \frac{(n+4)!}{(n+3)!} + 2$$

$$\begin{aligned}
\text{a) } & \frac{n!}{(n-2)!} + 24 \geq 10n \\
& \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} + 24 \geq 10n \\
& n \cdot (n-1) + 24 \geq 10n \\
& n^2 - n + 14 \geq 0 \\
& n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 56}}{2} \Rightarrow D < 0 \\
& \underline{n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } & n - \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \geq -1 \\
& n - \frac{(n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)!}{(n-4)!} \geq -1 \\
& n - (n-2) \cdot (n-3) \geq -1 \\
& -n^2 + 6n - 7 \geq 0 \\
& n_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = 3 \pm \sqrt{2} \cong \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases} \\
& \underline{n = 4, 5, 6, 7, 8, \dots}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & 3 \frac{(n+4)!}{(n+2)!} - 22n \leq 46 \\
 & 3 \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)!}{(n+2)!} - 22n \leq 46 \\
 & 3 \cdot (n+4) \cdot (n+3) - 22n \leq 46 \\
 & 3n^2 - n - 10 \leq 0 \\
 & n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{6} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -5/3 \end{array} \right. \\
 & \underline{n = -1, 0, 1, 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & \frac{n!}{(n-2)!} - 3n \leq \frac{(n+4)!}{(n+3)!} + 2 \\
 & n \cdot (n-1) - 3n \leq (n+4) + 2 \\
 & n^2 - 5n - 6 \leq 0 \\
 & n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 6 \\ -1 \end{array} \right. \\
 & \underline{n = 2, 3, 4, 5, 6}
 \end{aligned}$$

18.2 Kombinačné číslo, vlastnosti kombinačného čísla:

16. Nasledujúce kombinačné čísla $\binom{5}{2}$, $\binom{3}{3}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{5}$ vypočítajte tromi spôsobmi:

- Vypočítajte ich podľa definície.
- Výsledok vyhľadajte v Pascalovom trojuholníku.
- Vypočítajte ich na kalkulačke.

a) Vypočítajte ich podľa definície.

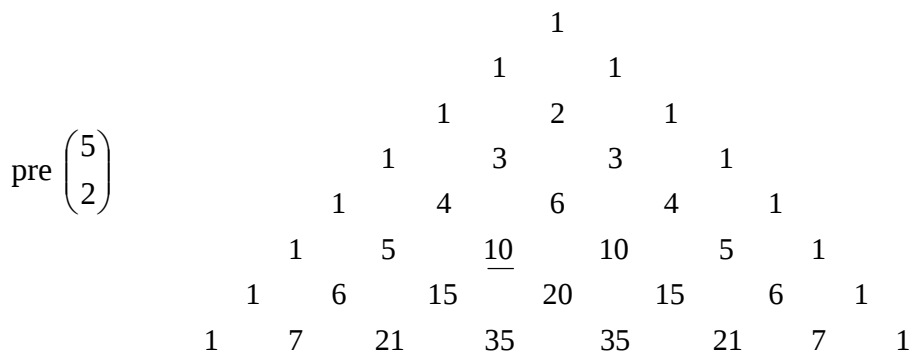
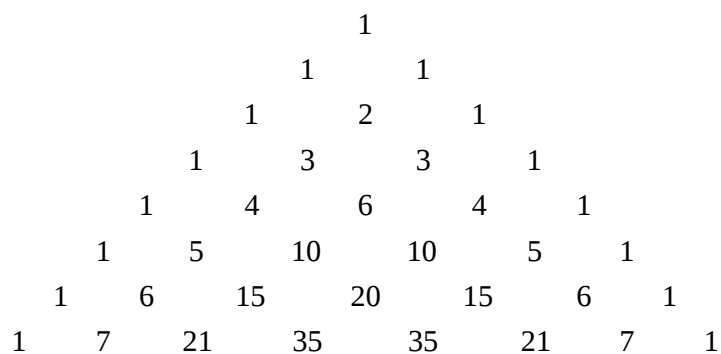
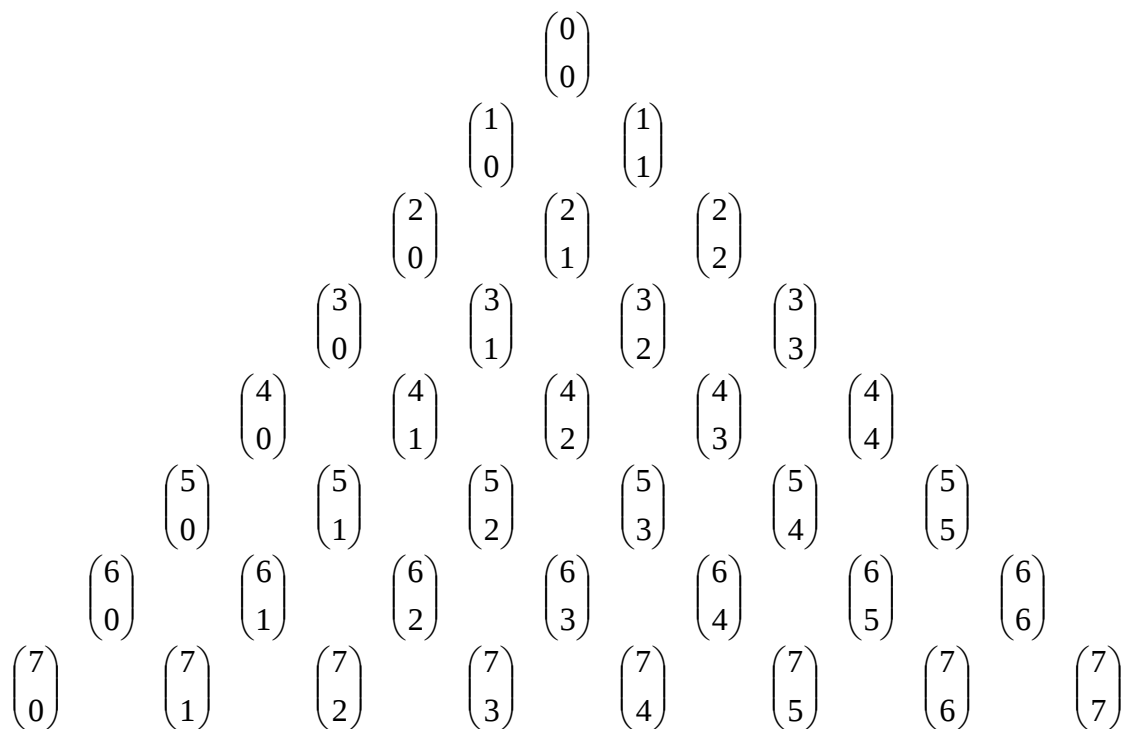
$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = 5 \cdot 2 = \underline{10}$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = \frac{1}{1} = \underline{1}$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 5!} = 7 \cdot 3 = \underline{21}$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2} = 7 \cdot 3 = \underline{21}$$

b) Výsledok vyhľadajte v Pascalovom trojuholníku.



$$\text{pre} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		<u>1</u>	
	1		4		6		4		1
1		1	5		10		10		5
	1	6		15		20		15	6
1	7	21		35		35		21	7
									1

$$\text{pre} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
1		1	5		10		10		5
	1	6		15		20		15	6
1	7	<u>21</u>		35		35		21	7
									1

$$\text{pre} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
1		1	5		10		10		5
	1	6		15		20		15	6
1	7	21		35		35		<u>21</u>	7
									1

17. Výpočtom overte, že platí:

a) $\binom{12}{5} = \binom{10}{5} + 2 \cdot \binom{10}{4} + \binom{10}{3} = \binom{9}{5} + 3 \cdot \binom{9}{4} + 3 \cdot \binom{9}{3} + \binom{9}{2}$

b) $\left[\binom{11}{7} \right]^2 - \left[\binom{10}{7} \right]^2 = \binom{10}{4} \cdot \left[\binom{10}{6} + \frac{1}{3} \cdot \binom{6}{5} \cdot \binom{10}{3} \right]$

c) $\binom{15}{3} - \binom{10}{3} - \binom{5}{3} = \binom{10}{2} \cdot 5 + 10 \cdot \binom{5}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \binom{12}{5} &= \binom{10}{5} + 2 \cdot \binom{10}{4} + \binom{10}{3} = \binom{9}{5} + 3 \cdot \binom{9}{4} + 3 \cdot \binom{9}{3} + \binom{9}{2} \\
 \frac{12!}{5! \cdot 7!} &= \frac{10!}{5! \cdot 5!} + 2 \cdot \frac{10!}{4! \cdot 6!} + \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} + 3 \cdot \frac{9!}{4! \cdot 5!} + 3 \cdot \frac{9!}{3! \cdot 6!} + \frac{9!}{2! \cdot 7!} \\
 \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \\
 11 \cdot 9 \cdot 8 &= 3 \cdot 7 \cdot 6 + 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 7 + 5 \cdot 3 \cdot 8 = 9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 4 \\
 \underline{792} &= 792 = 792
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \left[\binom{11}{7} \right]^2 - \left[\binom{10}{7} \right]^2 &= \binom{10}{4} \cdot \left[\binom{10}{6} + \frac{1}{3} \cdot \binom{6}{5} \cdot \binom{10}{3} \right] \\
 \left(\frac{11!}{7! \cdot 4!} \right)^2 - \left(\frac{10!}{7! \cdot 3!} \right)^2 &= \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot \left(\frac{10!}{6! \cdot 4!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6!}{5! \cdot 1!} \cdot \frac{10!}{7! \cdot 3!} \right) \\
 \left(\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2} \right)^2 - \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} \right)^2 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} \right) \\
 (11 \cdot 10 \cdot 3)^2 - (10 \cdot 3 \cdot 4)^2 &= 10 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (10 \cdot 3 \cdot 7 + 10 \cdot 3 \cdot 8) \\
 (330)^2 - (120)^2 &= 210 \cdot (210 + 240) \\
 \underline{94500} &= 94500
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad \binom{15}{3} - \binom{10}{3} - \binom{5}{3} &= \binom{10}{2} \cdot 5 + 10 \cdot \binom{5}{2} \\
 \frac{15!}{12! \cdot 3!} - \frac{10!}{7! \cdot 3!} - \frac{5!}{3! \cdot 2!} &= \frac{10!}{8! \cdot 2!} \cdot 5 + 10 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \\
 \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 4}{2} &= \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 5 + 10 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \\
 5 \cdot 7 \cdot 13 - 10 \cdot 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 &= 5 \cdot 9 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \cdot 2 \\
 \underline{325} &= 325
 \end{aligned}$$

18. Koľkokrát je číslo $M = \binom{100}{10}$ väčšie než číslo $N = \binom{99}{90}$?

$$n = \frac{M}{N} = \frac{\binom{100}{10}}{\binom{99}{90}} = \frac{\frac{100!}{90! \cdot 10!}}{\frac{99!}{90! \cdot 9!}} = \frac{100! \cdot 9!}{99! \cdot 10!} = \frac{100}{10} = \underline{10}$$

19. Ktoré z čísel K, L je väčšie?

$$\text{a) } K = \binom{500}{50}, L = \binom{501}{51}$$

$$\text{b) } K = \binom{120}{60}, L = \binom{120}{61}$$

$$\text{a) } K = \binom{500}{50}, L = \binom{501}{51}$$

$$\binom{500}{50} < \binom{501}{51}$$

$$\frac{500!}{50! \cdot 450!} < \frac{501!}{51! \cdot 450!}$$

$$\frac{500!}{50!} < \frac{501 \cdot 500!}{51 \cdot 50!}$$

$$1 < \frac{501}{51}$$

$$\underline{K < L}$$

$$\text{b) } K = \binom{120}{60}, L = \binom{120}{61}$$

$$\binom{120}{60} > \binom{120}{61}$$

$$\frac{120!}{60! \cdot 60!} > \frac{120!}{61! \cdot 59!}$$

$$\frac{120!}{60! \cdot 60 \cdot 59!} > \frac{120!}{61 \cdot 60! \cdot 59!}$$

$$\frac{1}{60} \cdot \frac{120!}{60! \cdot 59!} > \frac{1}{61} \cdot \frac{120!}{60! \cdot 59!}$$

$$\frac{1}{60} > \frac{1}{61}$$

$$\underline{K > L}$$

20. Ktoré z čísel $\binom{100}{k}$, kde $k \in \{0,1,2,3,\dots,100\}$ je najväčšie?

Najväčšie je vždy číslo v strede daného riadku Pascalovho trojuholníka.

V našom prípade je to 101. riadok (pre $n = 100$). Tento riadok obsahuje 101

členov a prostredný je teda 51. člen, t.j. číslo $\binom{100}{50}$.

$$\binom{100}{50} = \frac{100!}{50! \cdot 50!}$$

21. Dokážte a rozhodnite, pre ktoré $n \in \mathbf{N}$ platí:

$$\text{a) } n^2 = 2 \cdot \binom{n}{2} + \binom{n}{1} \qquad \text{c) } 2 \cdot \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$$

$$\text{b) } n^3 = 6 \cdot \binom{n}{3} + 6 \cdot \binom{n}{2} + \binom{n}{1} \qquad \text{d) } \frac{3}{2} \cdot \binom{3n-1}{n} = \binom{3n}{n}$$

a) $n^2 = 2 \cdot \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$, podmienka: $n \geq 2$

$$n^2 = 2 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} + \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!}$$

$$n^2 = 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2! \cdot (n-2)!} + \frac{n \cdot (n-1)!}{1! \cdot (n-1)!}$$

$$n^2 = n \cdot (n-1) + n$$

$$\underline{0 = 0} \Rightarrow \underline{\text{pre } n \in \mathbf{Z}^+; n \geq 2}$$

$$\mathbf{b)} \quad n^3 = 6 \cdot \binom{n}{3} + 6 \cdot \binom{n}{2} + \binom{n}{1}, \text{ podmienka: } n \geq 3$$

$$n^3 = 6 \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} + 6 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{1!(n-1)!}$$

$$n^3 = 6 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} + 6 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n$$

$$n^3 = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) + 3 \cdot n \cdot (n-1) + n$$

$$n^3 = n^3 - 3n^2 + 2n + 3n^2 - 3n + n$$

$$\underline{0 = 0} \Rightarrow \underline{\text{pre } n \in \mathbb{Z}^+; n \geq 3}$$

$$\mathbf{c)} \quad 2 \cdot \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}, \text{ podmienka: } n \geq 0$$

$$2 \cdot \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$2 \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(2n) \cdot (2n-1)!}{n!}$$

$$2 \cdot \frac{1}{(n-1)!} = \frac{2n}{n \cdot (n-1)!}$$

$$2 \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$

$$\underline{2 = 2} \Rightarrow \underline{\text{pre } n \in \mathbb{Z}^+}$$

$$\mathbf{d)} \quad \frac{3}{2} \cdot \binom{3n-1}{n} = \binom{3n}{n}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{(3n-1)!}{n!(2n-1)!} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{(3n-1)!}{n!(2n-1)!} = \frac{(3n) \cdot (3n-1)!}{n!(2n) \cdot (2n-1)!}$$

$$\underline{\underline{\frac{3}{2} = \frac{3}{2}}} \Rightarrow \underline{\underline{\text{pre } n \in \mathbb{Z}^+}}$$

22. Vyjadrite jedným kombinačným číslom:

$$\text{a)} \quad \binom{17}{8} + \binom{17}{9}$$

$$\text{d)} \quad \binom{12}{3} + \binom{4}{3} - \binom{12}{9}$$

$$\text{b)} \quad \binom{11}{7} + \binom{11}{5}$$

$$\text{e)} \quad \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}$$

$$\text{c)} \quad \binom{10}{1} + \binom{10}{0} + \binom{11}{9}$$

$$\text{f)} \quad \binom{20}{20} + \binom{21}{20} + \binom{22}{20} + \binom{23}{20}$$

$$\text{a)} \quad \binom{17}{8} + \binom{17}{9} = \underline{\binom{18}{9}}$$

$$\text{b)} \quad \binom{11}{7} + \binom{11}{5} = \binom{11}{7} + \binom{11}{6} = \underline{\binom{12}{7}} = \binom{12}{5}$$

$$\text{c)} \quad \binom{10}{1} + \binom{10}{0} + \binom{11}{9} = \binom{11}{1} + \binom{11}{9} = \binom{11}{1} + \binom{11}{2} = \underline{\binom{12}{2}} = \binom{12}{10}$$

$$\text{d)} \quad \binom{12}{3} + \binom{4}{3} - \binom{12}{9} = \binom{12}{3} + \binom{4}{3} - \binom{12}{3} = \underline{\binom{4}{3}} = \binom{4}{1}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = & // & \binom{3}{3} = \binom{4}{4} \\ & \binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = & // & \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{5}{4} \\ & \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = & // & \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4} \\ & \binom{6}{4} + \binom{6}{3} = \underline{\binom{7}{4}} = \binom{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{f)} \quad \binom{20}{20} + \binom{21}{20} + \binom{22}{20} + \binom{23}{20} & / & \binom{20}{20} = \binom{21}{21} \\
 \binom{21}{21} + \binom{21}{20} + \binom{22}{20} + \binom{23}{20} = & / & \binom{21}{20} + \binom{21}{21} = \binom{22}{21} \\
 \binom{22}{21} + \binom{22}{20} + \binom{23}{20} = & / & \binom{22}{21} + \binom{22}{20} = \binom{23}{21} \\
 \binom{23}{21} + \binom{23}{20} = \binom{24}{21} = \underline{\binom{24}{3}}
 \end{array}$$

23. Ak viete, že $\binom{14}{5} = 2002$, určte:

a) $\binom{14}{9}$

b) $\binom{14}{6}$

c) $\binom{14}{4}$

d) $\binom{14}{8}$

a) $\binom{14}{9} = \binom{14}{14-9} = \binom{14}{5} = \underline{2002}$

b) $\binom{14}{6} = ?$

$$\binom{14}{6} \cdot x = \binom{14}{5} \Rightarrow \frac{14!}{6! \cdot 8!} \cdot x = \frac{14!}{5! \cdot 9!} \Rightarrow \frac{14!}{6 \cdot 5! \cdot 8!} \cdot x = \frac{14!}{5! \cdot 9 \cdot 8!} \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot x = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\binom{14}{6} \cdot \frac{2}{3} = \binom{14}{5} = 2002 \Rightarrow \binom{14}{6} = 2002 \cdot \frac{3}{2} = \underline{3003}$$

c) $\binom{14}{4} = ?$

$$\binom{14}{4} \cdot x = \binom{14}{5} \Rightarrow \frac{14!}{4! \cdot 10!} \cdot x = \frac{14!}{5! \cdot 9!} \Rightarrow \frac{14!}{4! \cdot 10 \cdot 9!} \cdot x = \frac{14!}{5 \cdot 4! \cdot 9!} \Rightarrow \frac{1}{10} \cdot x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 2$$

$$\binom{14}{4} \cdot 2 = \binom{14}{5} = 2002 \Rightarrow \binom{14}{4} = 2002 \cdot \frac{1}{2} = \underline{1001}$$

$$\mathbf{d)} \binom{14}{8} = \binom{14}{6} = \underline{3003}$$

24. Jednotlivé zlomky najprv zapíšte pomocou kombinačných čísel a potom použitím vlastnosti kombinačných čísel upravte (určte podmienky pre n, k, r):

$$\mathbf{a)} \quad \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-k+1)! \cdot (k-1)!}$$

$$\mathbf{b)} \quad \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} + \frac{2n!}{(n-r+1)! \cdot (r-1)!} + \frac{n!}{(n-r+2)! \cdot (r-2)!}$$

$$\mathbf{a)} \quad \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-k+1)! \cdot (k-1)!} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \underline{\binom{n+1}{k}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad & \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} + \frac{2n!}{(n-r+1)! \cdot (r-1)!} + \frac{n!}{(n-r+2)! \cdot (r-2)!} = \binom{n}{r} + 2 \cdot \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r-2} = \\ & = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r-2} = \binom{n+1}{r} + \binom{n+1}{r-1} = \underline{\binom{n+2}{r}} \end{aligned}$$

18.3 Rovnice a nerovnice s kombinačnými číslami.

25. Riešte rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$$\text{a) } \binom{10}{4} \cdot x = \binom{12}{6}$$

$$\text{b) } \binom{6}{3} = 2 \cdot \left[x + \binom{5}{1} \right] + \frac{1}{2} \cdot \binom{4}{3}$$

$$\text{c) } \left[x + \binom{1}{1} \right] \cdot \left[x - \binom{2}{2} \right] = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$$

$$\text{d) } \binom{5}{0} \cdot x^2 - x \cdot \binom{2}{2} - \binom{8}{4} : \binom{7}{3} = 0$$

$$\text{e) } \left[\binom{x}{2} \right]^2 - 2 \cdot \binom{6}{5} \cdot \binom{x}{2} - \binom{7}{3} - \binom{5}{3} = 0$$

$$\text{a) } \binom{10}{4} \cdot x = \binom{12}{6}$$

$$\frac{10!}{4! \cdot 6!} \cdot x = \frac{12!}{6! \cdot 6!}$$

$$\frac{10!}{4! \cdot 6!} \cdot x = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{6 \cdot 5 \cdot 4! \cdot 6!}$$

$$x = \frac{12 \cdot 11}{6 \cdot 5}$$

$$x = \frac{22}{5}$$

$$\text{b) } \binom{6}{3} = 2 \cdot \left[x + \binom{5}{1} \right] + \frac{1}{2} \cdot \binom{4}{3}$$

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 2 \cdot (x + 5) + \frac{1}{2} \cdot 4$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 2x + 10 + 2$$

$$20 = 2x + 12$$

$$8 = 2x$$

$$\underline{x = 4}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \left[x + \binom{1}{1} \right] \cdot \left[x - \binom{2}{2} \right] = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} \\ & (x+1) \cdot (x-1) = 1+3+3+1 \\ & x^2 - 1 = 8 \\ & \underline{x = \pm 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \binom{5}{0} \cdot x^2 - x \cdot \binom{2}{2} - \binom{8}{4} : \binom{7}{3} = 0 \\ & x^2 - x - \frac{8!}{4! \cdot 4!} : \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 0 \\ & x^2 - x - \frac{8 \cdot 7!}{4! \cdot 4 \cdot 3!} \cdot \frac{4! \cdot 3!}{7!} = 0 \\ & x^2 - x - 2 = 0 \\ & x^2 - x - 2 = 0 \end{aligned} \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = -1 \wedge x_2 = 2}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & \left[\binom{x}{2} \right]^2 - 2 \cdot \binom{6}{5} \cdot \binom{x}{2} - \binom{7}{3} - \binom{5}{3} = 0, \text{ zavedieme substitúciu: } \binom{x}{2} = a \text{ za} \\ & \text{podmienky, že } x \geq 2. \\ & a^2 - 2 \cdot 6 \cdot a - \frac{7!}{4! \cdot 3!} - \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 0 \\ & a^2 - 12a - 45 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144+180}}{2} = 6 \pm 9 \Rightarrow a_1 = 15 \wedge a_2 = -3 \\ & \text{zo substitúcie:} \\ & \binom{x}{2} = 15 \Rightarrow \frac{x!}{2 \cdot (x-2)!} = 15 \Rightarrow x \cdot (x-1) = 30 \Rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \\ & x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = 6 \wedge x_2 = -5} \\ & \binom{x}{2} = -3 \Rightarrow \frac{x!}{2 \cdot (x-2)!} = -3 \Rightarrow x \cdot (x-1) = -6 \Rightarrow x^2 - x + 6 = 0 \\ & x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-24}}{2} \Rightarrow x_{3,4} = \emptyset \\ & \text{Vzhľadom na počiatočnú podmienku: } \underline{x = 6} \end{aligned}$$

26. Riešte rovnice s neznámou $x \in \mathbf{N}$:

$$\text{a) } \binom{8}{x} = \binom{8}{5} \qquad \text{b) } \binom{6}{x} + \binom{6}{x+1} = \binom{7}{4} \qquad \text{c) } \binom{10}{x} = 45$$

a) $\binom{8}{x} = \binom{8}{5}$, nakoľko $\binom{8}{5} = \binom{8}{3}$, má rovnica dve riešenia: $x_1 = 3 \wedge x_2 = 5$.

b) $\binom{6}{x} + \binom{6}{x+1} = \binom{7}{4}$, využijeme vlastnosť kombinačných čísel:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \Rightarrow \binom{6}{x} + \binom{6}{x+1} = \binom{7}{x+1} \quad \text{a} \quad \binom{7}{4} = \binom{7}{3}, \quad \text{potom naša}$$

rovnica dostáva tvar:

$$\binom{7}{x+1} = \binom{7}{4} = \binom{7}{3} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + 1 = 4 \\ x_2 + 1 = 3 \end{matrix} \Rightarrow \underline{x_1 = 3 \wedge x_2 = 2}.$$

c) $\binom{10}{x} = 45$. Číslo 45 je kombinačné číslo $\binom{10}{2} \vee \binom{10}{8} \Rightarrow \underline{x_1 = 8 \wedge x_2 = 2}$.

27. Riešte rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

a) $\binom{x}{2} + \binom{x+1}{2} = 25$

b) $\binom{x}{1} + \binom{x-3}{x-4} = 2x - 3$

c) $\binom{x-1}{x-3} - 2 \cdot \binom{x-2}{x-4} = 0$

d) $2 \cdot \binom{x+6}{x+4} - \binom{x+4}{x+2} = 4! + \binom{5}{2} \cdot x$

e) $\binom{x+1}{x+1} + \binom{5}{3} \cdot \binom{x+1}{x} - \binom{4}{3} \cdot \binom{x+1}{x-1} = 1$

f) $5 \cdot \binom{x+8}{x+7} - \binom{x}{1} = 2 \cdot \binom{x}{0} \cdot \binom{x+1}{x} \cdot \binom{x}{x-1}$

$$g) \left[\binom{x}{1} \right]^2 - 11 = 2 \cdot \left[\binom{x-1}{1} + \binom{x-2}{2} \right] \cdot \binom{x-3}{0}$$

$$h) \binom{x}{x-3} + \binom{x+1}{x-2} = \frac{1}{3} \cdot \left[x^3 - \binom{7}{4} \right]$$

$$a) \binom{x}{2} + \binom{x+1}{2} = 25, \text{ podmienka: } x \geq -1$$

$$\frac{x!}{2!(x-2)!} + \frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} = 25$$

$$x \cdot (x-1) + (x+1) \cdot x = 50$$

$$x^2 - x + x^2 + x = 50$$

$$2x^2 = 50 \Rightarrow \underline{x = 5}$$

$$b) \binom{x}{1} + \binom{x-3}{x-4} = 2x-3, \text{ podmienka: } x \geq 4$$

$$x + x-3 = 2x-3$$

$$2x-3 = 2x-3 \Rightarrow \underline{x \in \mathbf{Z}^+; x \geq 4}$$

$$c) \binom{x-1}{x-3} + 2 \cdot \binom{x-2}{x-4} = 0, \text{ podmienka: } x \geq 4$$

$$\frac{(x-1)!}{(x-3)! \cdot 2!} - 2 \cdot \frac{(x-2)!}{(x-4)! \cdot 2!} = 0$$

$$(x-1) \cdot (x-2) - 2 \cdot (x-2) \cdot (x-3) = 0$$

$$(x-2) \cdot [(x-1) - 2 \cdot (x-3)] = 0$$

$$(x-2) \cdot (-x+5) = 0 \Rightarrow x = 2 \wedge x = 5$$

Vzhľadom na počiatočnú podmienku je riešením len číslo $x = 5$.

d) $2 \cdot \binom{x+6}{x+4} - \binom{x+4}{x+2} = 4! + \binom{5}{2} \cdot x$, podmienka: $x \geq -2$

$$2 \cdot \frac{(x+6)!}{(x+4)! \cdot 2!} - \frac{(x+4)!}{(x+2)! \cdot 2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 + \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot x$$

$$(x+6) \cdot (x+5) - \frac{1}{2} \cdot (x+4) \cdot (x+3) = 24 + 10x$$

$$x^2 + 11x + 30 - \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 7x + 12) = 24 + 10x$$

$$2x^2 + 22x + 60 - x^2 - 7x - 12 = 48 + 20x$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x \cdot (x-5) = 0 \Rightarrow \underline{x=0 \wedge x=5}$$

e) $\binom{x+1}{x+1} + \binom{5}{3} \cdot \binom{x+1}{x} - \binom{4}{3} \cdot \binom{x+1}{x-1} = 1$, podmienka: $x \geq 1$

$$1 + 10 \cdot (x+1) - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x+1) = 1$$

$$1 + 10x + 10 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$-2x^2 + 8x + 10 = 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow x = 5 \wedge x = -1$$

Vzhľadom na počiatočnú podmienku je riešením len číslo $x=5$.

f) $5 \cdot \binom{x+8}{x+7} - \binom{x}{1} = 2 \cdot \binom{x}{0} \cdot \binom{x+1}{x} \cdot \binom{x}{x-1}$, podmienka: $x \geq 1$

$$5 \cdot (x+8) - x = 2 \cdot 1 \cdot (x+1) \cdot x$$

$$5x + 40 - x = 2x^2 + 2x$$

$$2x^2 - 2x - 40 = 0$$

$$x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} \Rightarrow x = 5 \wedge x = -4$$

Vzhľadom na počiatočnú podmienku je riešením len číslo $x=5$.

$$\text{g)} \quad \left[\binom{x}{1} \right]^2 - 11 = 2 \cdot \left[\binom{x-1}{1} + \binom{x-2}{2} \right] \cdot \binom{x-3}{0}, \text{ podmienka: } x \geq 3$$

$$x^2 - 11 = 2 \cdot \left[(x-1) + \frac{1}{2} \cdot (x-2) \cdot (x-3) \right] \cdot 1$$

$$x^2 - 11 = 2x - 2 + x^2 - 5x + 6$$

$$3x = 15 \Rightarrow \underline{x = 5}$$

$$\text{h)} \quad \binom{x}{x-3} + \binom{x+1}{x-2} = \frac{1}{3} \cdot \left[x^3 - \binom{7}{4} \right], \text{ podmienka: } x \geq 3$$

$$\frac{x!}{(x-3)! \cdot 3!} + \frac{(x+1)!}{(x-2)! \cdot 3!} = \frac{1}{3} \cdot \left(x^3 - \frac{7!}{4! \cdot 3!} \right)$$

$$x \cdot (x-1) \cdot (x-2) + (x+1) \cdot x \cdot (x-1) = 2 \cdot (x^3 - 35)$$

$$x \cdot (x-1) \cdot (x-2 + x+1) = 2x^3 - 70 \Rightarrow (x^2 - x) \cdot (2x - 1) = 2x^3 - 70$$

$$3x^2 - x - 70 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 280}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm 29}{6} \Rightarrow \underline{x = 5}$$

28. Riešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

$$\text{a)} \quad \binom{x-2}{x-4} + 3 \geq 4x$$

$$\text{b)} \quad \binom{x+1}{x} + 2x < 50$$

$$\text{c)} \quad \binom{x+4}{2} \geq \binom{x-4}{2}$$

$$\text{d)} \quad \binom{x+1}{x-1} - \binom{x}{x} \cdot \binom{8}{5} \leq 44$$

$$\text{e)} \quad \binom{x}{2} + \binom{x+2}{2} + \binom{x+4}{2} \leq 100$$

$$\text{f)} \quad 6 \cdot \binom{x+3}{3} - (x+3)^3 \leq \frac{x+2}{2} - 6 \cdot \binom{x+2}{2}$$

a) $\binom{x-2}{x-4} + 3 \geq 4x$, podmienka: $x \geq 4$

$$\frac{(x-2)!}{(x-4)! \cdot 2!} + 3 \geq 4x$$

$$(x-2) \cdot (x-3) + 6 \geq 8x$$

$$x^2 - 5x + 6 + 6 - 8x \geq 0$$

$$x^2 - 13x + 12 \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 48}}{2} = \frac{13 \pm 11}{2} \Rightarrow x_1 = 12 \wedge x_2 = -1$$

$$(x-12) \cdot (x+1) \geq 0 \Rightarrow x-12 \geq 0 \wedge x+1 \geq 0 \vee x-12 \leq 0 \wedge x+1 \leq 0$$

$$x \geq 12 \wedge x \geq -1 \vee x \leq 12 \wedge x \leq -1$$

$$x \in \mathbb{Z}^+; x \geq 4 \quad \wedge \quad x \geq 12 \quad \wedge \quad x \leq -1 \Rightarrow$$

$$\underline{x \geq 12}$$

b) $\binom{x+1}{x} + 2x < 50$, podmienka: $x \geq 0$

$$x+1 + 2x < 50$$

$$x < \frac{49}{3} = 16, \bar{3} \Rightarrow \underline{x = 0, 1, \dots, 16}$$

c) $\binom{x+4}{2} \geq \binom{x-4}{2}$, podmienka: $x \geq 6$

$$\frac{1}{2} \cdot (x+4) \cdot (x+3) \geq \frac{1}{2} \cdot (x-4) \cdot (x-5)$$

$$x^2 + 7x + 12 \geq x^2 - 9x + 20$$

$$16x \geq 8$$

$$x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x = 6, 7, \dots$$

d) $\binom{x+1}{x-1} - \binom{x}{x} \cdot \binom{8}{5} \leq 44$, podmienka: $x \geq 1$

$$\frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot x - \frac{8!}{5! \cdot 3!} \leq 44$$

$$x^2 + x - 112 - 88 \leq 0$$

$$x^2 + x - 200 \leq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+800}}{2} \cong 13,65 \Rightarrow \underline{x = 1, 2, \dots, 13}$$

e) $\binom{x}{2} + \binom{x+2}{2} + \binom{x+4}{2} \leq 100$, podmienka: $x \geq 0$

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot (x+2) \cdot (x+1) + \frac{1}{2} \cdot (x+4) \cdot (x+3) \leq 100$$

$$x^2 - x + x^2 + 3x + 2 + x^2 + 7x + 12 \leq 200$$

$$3x^2 + 9x - 186 \leq 0$$

$$x^2 + 3x - 62 \leq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 248}}{2} \Rightarrow x = 6,5 \wedge x = -9,5$$

Vzhľadom na počiatočnú podmienku je riešením $x = 2, 3, 4, 5, 6$.

f) $6 \cdot \binom{x+3}{3} - (x+3)^3 \leq \frac{x+2}{2} - 6 \cdot \binom{x+2}{2}$, podmienka: $x \geq -2$

$$6 \cdot \frac{(x+3)!}{3! \cdot x!} - (x+3)^3 \leq \frac{x+2}{2} - 6 \cdot \frac{(x+2)!}{2! \cdot x!}$$

$$(x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+1) - (x+3)^3 \leq \frac{x+2}{2} - 3 \cdot (x+2) \cdot (x+1)$$

$$(x+3) \cdot (x^2 + 3x + 2 - x^2 - 6x - 9) \leq \frac{x+2}{2} - 3 \cdot (x^2 + 3x + 2)$$

$$(x+3) \cdot (-3x - 7) \leq \frac{x+2}{2} - 3x^2 - 9x - 6$$

$$-3x^2 - 16x - 21 \leq \frac{x+2}{2} - 3x^2 - 9x - 6$$

$$-16x - 21 \leq \frac{x+2}{2} - 9x - 6$$

$$-7x - 15 \leq \frac{x+2}{2}$$

$$-14x - 30 \leq x + 2$$

$$-16x \leq 32$$

$$x \geq 2 \Rightarrow \underline{x = 2, 3, 4, \dots}$$

29. Riešte rovnice a nerovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

a) $\binom{4x+2}{4x} + \binom{3x}{3x-2} - \binom{2x+1}{2x} = 5 \cdot \left[\binom{5x}{1} + \binom{5x}{5x} \right]$

b) $\binom{3x-3}{1} + \binom{3x-3}{2} > \frac{3x-3}{2}$

a)
$$\binom{4x+2}{4x} + \binom{3x}{3x-2} - \binom{2x+1}{2x} = 5 \cdot \left[\binom{5x}{1} + \binom{5x}{5x} \right], \text{ podmienka: } x \geq \frac{2}{3}$$

$$\frac{(4x+2)!}{(4x)! \cdot 2!} + \frac{(3x)!}{(3x-2)! \cdot 2!} - (2x+1) = 5 \cdot (5x+1)$$

$$(4x+2) \cdot (4x+1) + 3x \cdot (3x-1) - 2 \cdot (2x+1) = 10 \cdot (5x+1)$$

$$16x^2 + 12x + 2 + 9x^2 - 3x - 4x - 2 = 50x + 10$$

$$25x^2 - 45x - 10 = 0$$

$$5x^2 - 9x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+40}}{10} = \frac{9 \pm 11}{10} \Rightarrow x = 2 \wedge x = -\frac{1}{5}$$

Vzhľadom na počiatočnú podmienku je riešením len číslo $x = 2$.

b)
$$\binom{3x-3}{1} + \binom{3x-3}{2} > \frac{3x-3}{2}, \text{ podmienka: } x \geq 1$$

$$3x-3 + \frac{(3x-3)!}{2! \cdot (3x-5)!} > \frac{3x-3}{2} \cdot 2$$

$$2 \cdot (3x-3) + (3x-3) \cdot (3x-4) > 3x-3$$

$$(3x-3) \cdot [2 + (3x-4)] > 3x-3 \cdot \frac{1}{3x-3}$$

$$3x-2 > 1$$

$$x > 1 \Rightarrow \underline{x = 2, 3, 4, \dots}$$

30. Riešte nerovnice a rovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

a) $\binom{8}{x} < 2 \cdot \binom{8}{x-1}$	c) $\left[\binom{x}{2} \right]^2 - 5 \cdot \binom{x}{2} - 6 = 0$
b) $\binom{7}{x+1} \leq 2 \cdot \binom{7}{x}$	d) $\left[\left(\frac{x}{2} \right)! \right]^2 - 5 \cdot \left(\frac{x}{2} \right)! - 6 = 0$

a)
$$\binom{8}{x} < 2 \cdot \binom{8}{x-1}, \text{ podmienka: } x \leq 8$$

$$\frac{8!}{x! \cdot (8-x)!} < 2 \cdot \frac{8!}{(x-1)! \cdot (9-x)!}$$

$$\frac{(9-x)!}{(8-x)!} < 2 \cdot \frac{x!}{(x-1)!}$$

$$9-x < 2 \cdot x$$

$$9 < 3x \Rightarrow x > 3 \Rightarrow \underline{x = 4, 5, 6, 7, 8}$$

b) $\binom{7}{x+1} \leq 2 \cdot \binom{7}{x}$, podmienka: $x \leq 6$

$$\frac{7!}{(x+1)!(6-x)!} \leq 2 \cdot \frac{7!}{x!(7-x)!}$$

$$7-x \leq 2 \cdot (x+1)$$

$$5 \leq 3x \Rightarrow x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow \underline{x = 2, 3, 4, 5, 6}$$

c) $\left[\binom{x}{2}\right]^2 - 5 \cdot \binom{x}{2} - 6 = 0$, podmienka: $x \geq 2$

Zavedieme substitúciu: $\binom{x}{2} = a$

$$a^2 - 5a - 6 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow a = 6 \wedge a = -1$$

$$\binom{x}{2} = 6 \Rightarrow \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} = 6 \Rightarrow x \cdot (x-1) = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \wedge x_2 = -3$$

$$\binom{x}{2} = -1 \Rightarrow \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} = -1 \Rightarrow x \cdot (x-1) = -2 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \Rightarrow x_{3,4} = \emptyset$$

Vzhľadom na počiatočnú podmienku je riešením len číslo $x = 4$.

d) $\left[\left(\frac{x}{2}\right)!\right]^2 - 5 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)! - 6 = 0$, podmienka: $x \geq 2$

Zavedieme substitúciu: $\left(\frac{x}{2}\right)! = a$

$$a^2 - 5a - 6 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow a = 6 \wedge a = -1$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)! = 6 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)! = 3! \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow \underline{x = 6}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)! \neq -1 \Rightarrow x = \emptyset$$

31. Vypočítajte celé čísla x, y tak, aby boli riešením sústavy:

$$\text{a) } \binom{x}{y} = 2 \cdot \binom{x-1}{y-1}$$

$$2x - 3y - 3 = 0$$

$$\text{b) } \binom{x+2}{y+2} : \binom{x+1}{y+1} = 5 : 4$$

$$x : y = 4 : 3$$

$$\text{c) } \binom{x}{y} : \binom{x-1}{y-1} = 1 + \frac{3}{5}$$

$$\binom{x-1}{y-1} : \binom{x-2}{y-2} = 1 + \frac{3}{4}$$

$$\text{d) } \binom{x-1}{y} : \binom{x}{y+1} : \binom{x+1}{y+2} = 5 : 6 : 7$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \binom{x}{y} &= 2 \cdot \binom{x-1}{y-1} \Rightarrow \frac{x!}{y!(x-y)!} = 2 \cdot \frac{(x-1)!}{(y-1)!(x-y)!} \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y \\ \underline{2x - 3y - 3 = 0} \\ 2 \cdot (2y) - 3y - 3 &= 0 \\ \underline{y = 3 \Rightarrow x = 6} \end{aligned}$$

$$\mathbf{b)} \quad \binom{x+2}{y+2} : \binom{x+1}{y+1} = 5 : 4$$

$$\underline{x : y = 4 : 3}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{(x+2)!}{(y+2)! \cdot (x-y)!} \cdot \frac{(y+1)! \cdot (x-y)!}{(x+1)!} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{(x+2) \cdot (x+1)!}{(y+2) \cdot (y+1)!} \cdot \frac{(y+1)!}{(x+1)!} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}y$$

$$\frac{x+2}{y+2} = \frac{5}{4} \Rightarrow x+2 = \frac{5}{4}(y+2)$$

$$\frac{4}{3}y + 2 = \frac{5}{4}(y+2) \Big/ \cdot 12$$

$$16y + 24 = 15y + 30$$

$$\underline{y = 6 \Rightarrow x = 8}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & \binom{x}{y} : \binom{x-1}{y-1} = 1 + \frac{3}{5} \\
& \binom{x-1}{y-1} : \binom{x-2}{y-2} = 1 + \frac{3}{4} \\
& \frac{x!}{y!(x-y)!} \cdot \frac{(y-1)!(x-y)!}{(x-1)!} = \frac{8}{5} \\
& \frac{(x-1)!}{(y-1)!(x-y)!} \cdot \frac{(y-2)!(x-y)!}{(x-2)!} = \frac{7}{4} \\
& \frac{x \cdot (x-1)!}{y \cdot (y-1)!} \cdot \frac{(y-1)!}{(x-1)!} = \frac{8}{5} \\
& \frac{(x-1) \cdot (x-2)!}{(y-1) \cdot (y-2)!} \cdot \frac{(y-2)!}{(x-2)!} = \frac{7}{4} \\
& \frac{x}{y} = \frac{8}{5} \\
& \frac{x-1}{y-1} = \frac{7}{4} \\
& x = \frac{8}{5}y \\
& x-1 = \frac{7}{4} \cdot (y-1) \\
& \frac{8}{5} \cdot y - 1 = \frac{7}{4} \cdot (y-1) \quad \bigg/ \cdot 20 \\
& 32y - 20 = 35y - 35 \\
& 3y = 15 \Rightarrow \underline{y = 5 \Rightarrow x = 8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & \frac{\binom{x-1}{y} : \binom{x}{y+1} : \binom{x+1}{y+2} = 5:6:7}{\binom{x-1}{y} : \binom{x}{y+1} = 5:6} \\
 & \frac{\binom{x}{y+1} : \binom{x+1}{y+2} = 6:7}{\frac{(x-1)!}{y!(x-1-y)!} \cdot \frac{(y+1)!(x-y-1)!}{x!} = \frac{5}{6}} \\
 & \frac{\frac{(y+2)!(x+1-y-2)!}{(x+1)!} = \frac{6}{7}}{\frac{(x-1)!}{y!} \cdot \frac{(y+1) \cdot y!}{x \cdot (x-1)!} = \frac{5}{6}} \\
 & \frac{\frac{x!}{(y+1)!} \cdot \frac{(y+2) \cdot (y+1)!}{(x+1) \cdot x!} = \frac{6}{7}}{\frac{y+1}{x} = \frac{5}{6}} \\
 & \frac{y+2}{x+1} = \frac{6}{7} \Rightarrow y+2 = \frac{6}{7} \cdot (x+1) \Rightarrow y = \frac{6}{7} \cdot (x+1) - 2}{y+1 = \frac{5}{6} \cdot x} \\
 & \frac{6}{7} \cdot (x+1) - 2 + 1 = \frac{5}{6} \cdot x \quad / \cdot 42 \\
 & 36x + 36 - 42 = 35x \\
 & \underline{x = 6 \Rightarrow y = 4}
 \end{aligned}$$

18.4 Pravidlo kombinatorického súčinu

32. Jana má päť rôznofarebných tričiek a tri rôzne sukne. Koľkými spôsobmi si môže vziať tričko a sukňu, aby vždy vypadala inak?

$$5 \cdot 3 = \underline{15}$$

33. Do tanečnej prišlo 32 chlapcov a 34 dievčat. Koľko rôznych tanečných párov môžu vytvoriť? Za predpokladu, že prvý pár je zadaný, každý pár spolu tancuje 1 minútu a ďalšia výmena trvá 5 sekúnd, vypočítajte, ako dlho by musel trvať tanečný večer, aby sa všetci v pároch vystriedali.

$$32 \cdot 34 = \underline{1088} \text{ párov,}$$

$$1088 \text{ min} + 1087 \cdot 5 \text{ s} = 1088 \text{ min} + 5435 \text{ s} = 1178 \text{ min} + 35 \text{ s} = \\ = \underline{\underline{19 \text{ hod} + 38 \text{ min} + 35 \text{ s}}}$$

34. V reštaurácii majú na jedálnom lístku 3 druhy polievok, 7 možností výberu hlavného jedla, 4 druhy múčnikov. Na pitie si možno objednať kávu, malinovku alebo džús. Koľkými spôsobmi si host' môže vybrať obed, za predpokladu, že bude jesť

- a) len polievku a hlavné jedlo,
- b) polievku, hlavné jedlo a ďalej si objedná nápoj,
- c) polievku, hlavné jedlo, múčnik a nápoj.

a) $3 \cdot 7 = \underline{21}$

b) $3 \cdot 7 \cdot 3 = \underline{63}$

c) $3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 4 = \underline{252}$

35. V triede chodí 14 žiakov na nemčinu a 13 na francúzštinu. Každý žiak navštevuje práve jeden z uvedených predmetov. Koľkými spôsobmi možno vybrať dvojicu na týždennú službu tak, aby mal službu jeden žiak z oddelenia nemčiny a jeden žiak z oddelenia francúzštiny? Koľko rokov by žiaci museli chodiť do školy, aby sa všetky tieto dvojice vystriedali? (Počítajte, že školský rok má 33 vyučovacích týždňov.)

dvojíc: $14 \cdot 13 = \underline{182}$

dĺžka školy v týždňoch: 182, v rokoch: $182 : 33 = \underline{5 \text{ rokov a } 17 \text{ týždňov}}$

36. Maminka kúpila 10 rožkov a 8 žemlí. Martin si zoberie buď rožok, alebo žemľu. Potom si Dávid zoberie 1 žemľu a 1 rožok. Kedy má Dávid viac možností výberu, keď si Martin vzal rožok, alebo keď si Martin vzal žemľu?

- ak si Martin zoberie rožok: $9 \cdot 8 = 72$
- ak si Martin zoberie žemľu: $10 \cdot 7 = 70$

Z toho vyplýva, že Dávid má viac možností (o dve), ak si Martin zoberie rožok.

18.5 Variácie

37. Koľko rôznych prirodzených štvorčíselných čísel s rôznymi číslicami možno zostaviť z číslic 1, 2, 3, 4, 5? Koľko z nich je deliteľných 5? Koľko z nich je nepárnych?

- počet rôznych prirodzených štvorciferných čísel: $V_4(5) = \frac{5!}{(5-4)!} = \underline{120}$
- počet štvorciferných čísel deliteľných 5: $V_3(4) = \frac{4!}{(4-3)!} = \underline{24}$
- počet záporných čísel: $3 \cdot V_3(4) = 3 \cdot \frac{4!}{(4-3)!} = 3 \cdot 24 = \underline{72}$

38. Koľko rôznych prirodzených päťciferných čísel s rôznymi ciframi môžeme zostaviť z cifier 0, 2, 4, 6, 7, 8, 9? Koľko z nich je deliteľných 4? Koľko z nich je deliteľných 10? Koľko z nich je párnych?

- *počet rôznych prirodzených päťciferných čísel:*

$$V_5(7) - V_4(6) = \frac{7!}{(7-5)!} - \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{7!}{2!} - \frac{6!}{2!} = \underline{4320}$$

- *počet päťciferných čísel deliteľných 4:*

Hľadáme čísla, ktoré končia ciframi: 04, 08, 20, 24, 28, 40, 48, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 92 a 96. Pre tieto koncové čísla platí:

$$\text{xxx04} - V_3(5)$$

$$\text{xxx08} - V_3(5)$$

$$\text{xxx20} - V_3(5)$$

$$\text{xxx24} - V_3(5) - V_2(4)$$

$$\text{xxx28} - V_3(5) - V_2(4)$$

$$\text{xxx40} - V_3(5)$$

$$\text{xxx48} - V_3(5) - V_2(4)$$

$$\text{xxx60} - V_3(5)$$

$$\text{xxx64} - V_3(5) - V_2(4)$$

$$\text{xxx68} - V_3(5) - V_2(4)$$

$$\text{xxx82} - V_3(5) - V_2(4)$$

$$\text{xxx86} - V_3(5) - V_2(4)$$

$$\text{xxx}80 - V_3(5)$$

$$\text{xxx}84 - V_3(5) - V_2(4)$$

$$\text{xxx}82 - V_3(5) - V_2(4)$$

$$\text{xxx}96 - V_3(5) - V_2(4)$$

$$\textbf{spolu: } 6 \cdot V_3(5) + 10 \cdot [V_3(5) - V_2(4)] = \underline{840}$$

- počet päťciferných párnych:

Hľadáme čísla, ktoré končia ciframi: 0, 2, 4, 6 alebo 8. Pre tieto čísla platí:

$$\text{xxxx}0 - V_4(6)$$

$$\text{xxxx}2 - V_4(6) - V_3(5)$$

$$\text{xxxx}4 - V_4(6) - V_3(5)$$

$$\text{xxxx}6 - V_4(6) - V_3(5)$$

$$\text{xxxx}8 - V_4(6) - V_3(5)$$

$$\textbf{spolu: } V_4(6) + 4 \cdot [V_4(6) - V_3(5)] = \underline{1560}$$

39. Určte počet všetkých prirodzených čísiel väčších než 2000, v ktorých zápisoch sa vyskytujú cifry 1, 2, 4, 6, 8, a to každá najviac jedenkrát?

Sú to všetky štvorciferné čísla vytvorené z daných cifier, ktoré nezačínajú cifrou 1 $[4 \cdot V_3(4)]$ a všetky päťciferné čísla $[P(5)]$, t.j.:

$$4 \cdot V_3(4) + P(5) = 4 \cdot 4! + 5! = 4 \cdot 24 + 120 = \underline{216}$$

40. Určte počet všetkých prirodzených čísiel väčších než 300 a menších než 5000, v ktorých zápisoch sa vyskytujú cifry 2, 3, 4, 7, 8, a to každá najviac raz?

$$4 \cdot V_2(4) + 3 \cdot V_3(4) = 4 \cdot \frac{4!}{2!} + 3 \cdot \frac{4!}{1!} = \underline{120}$$

41. V triede 1.A sa vyučuje 11 rôznych predmetov. Koľkými spôsobmi môžeme zostaviť rozvrh na jeden deň, ak sa v tento deň vyučuje 6 rôznych predmetov?

$$V_6(11) = \frac{11!}{6!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \underline{332640}$$

42. V triede je 30 miest, ale v triede 3.B je len 28 žiakov. Koľkými spôsobmi môžeme zostaviť zasadací poriadok? (V triede sú tri rady po 5 lavíc. Jedna lavica je pre dvoch žiakov.)

$$V_{28}(30) = \frac{30!}{2!} = \underline{\underline{\frac{30!}{2}}}$$

43. Na bežeckej dráhe beží 8 súťažiacich. Za predpokladu, že každú z medailí získa práve jeden súťažiaci, vypočítajte, koľko je možností na rozdelenie zlatej, striebornej a bronzovej medailí medzi súťažiacich.

$$V_3(8) = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = \underline{336}$$

44. Z koľkých prvkov môžeme vytvoriť 992 variácií druhej triedy bez opakovania?

$$V_2(n) = 992$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 992$$

$$n \cdot (n-1) = 992$$

$$n^2 - n - 992 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 3968}}{2} = \frac{1 \pm 63}{2} = \underline{32}$$

Záporný koreň nás nezaujíma (počet prvkov nemôže byť záporné číslo).

45. Ak sa zväčší počet prvkov o 5, zväčší sa počet variácií druhej triedy bez opakovania vytvorených z týchto prvkov o 1170. Určte pôvodný počet prvkov.

$$\begin{aligned}
 V_2(n+5) &= V_2(n) + 1170 \\
 \frac{(n+5)!}{(n+3)!} &= \frac{n!}{(n-2)!} + 1170 \\
 (n+5) \cdot (n+4) &= n \cdot (n-1) + 1170 \\
 n^2 + 9n + 20 &= n^2 - n + 1170 \\
 10n &= 1150 \\
 \underline{n = 115}
 \end{aligned}$$

46. Ak sa zmenší počet prvkov o 27, zmenší sa počet variácií druhej triedy bez opakovania vytvorených z týchto prvkov desaťkrát. Určte pôvodný počet prvkov.

$$\begin{aligned}
 V_2(n-27) &= \frac{V_2(n)}{10} \\
 \frac{(n-27)!}{(n-29)! \cdot 2!} &= \frac{1}{10} \cdot \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} \\
 \frac{(n-27) \cdot (n-28) \cdot (n-29)!}{(n-29)! \cdot 2!} &= \frac{1}{10} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2!} \\
 (n-27) \cdot (n-28) &= \frac{1}{10} \cdot n \cdot (n-1) \\
 n^2 - 55n + 756 &= \frac{1}{10} \cdot (n^2 - n) \\
 10n^2 - 550n + 7560 &= n^2 - n \\
 9n^2 - 549n + 7560 &= 0 \\
 n_{1,2} &= \frac{549 \pm \sqrt{549^2 - 4 \cdot 9 \cdot 7560}}{2 \cdot 9} = \frac{549 \pm 171}{18} \Rightarrow n_1 = 36 \wedge n_2 = 18,9
 \end{aligned}$$

Riešeniu vyhovuje len celé číslo, preto sa $n = 36$.

18.6 Permutácie

47. Koľkými spôsobmi môžeme postaviť 20 žiakov do radu pri nástupe na telocvik?

$$P(20) = \underline{20!}$$

48. Koľkými spôsobmi môžeme postaviť do rady vedľa seba na policičku 15 rôznych kníh?

$$P(15) = \underline{15!}$$

49. Koľkými spôsobmi môžeme postaviť do rady na policičku 10 rôznych slovenských kníh a 5 anglických tak, že najprv budú knihy slovenské a vedľa nich knihy anglické?

$$P(10) \cdot P(5) = 10! \cdot 5! = \underline{435456000}$$

50. Koľkými spôsobmi môžeme rozmiešať 32 kariet?

$$P(32) = \underline{32!}$$

51. Koľko rôznych deväťciferných čísel s rôznymi ciframi môžeme zostaviť z cifier 1 až 9?

$$P(9) = 9! = \underline{362880}$$

18.7 Kombinácie

52. Koľko priamok určuje desať rôznych bodov v rovine, z ktorých

- a) žiadne tri neležia na jednej priamke,
- b) práve 6 leží na jednej priamke?

a) $C_2(10) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \underline{45}$

b) $C_2(10) - C_2(6) + 1 = \binom{10}{2} - \binom{6}{2} + 1 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} - \frac{6!}{4! \cdot 2!} + 1 = 45 - 15 + 1 = \underline{31}$

53. Koľko kružníc desať rôznych bodov v rovine, z ktorých

- a) žiadne tri neležia na jednej priamke,
- b) práve 6 leží na jednej priamke?

a) $C_3(10) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \underline{120}$

b) $C_3(10) - C_3(6) + 1 = \binom{10}{3} - \binom{6}{3} + 1 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} - \frac{6!}{3! \cdot 3!} + 1 = 120 - 20 + 1 = \underline{101}$

54. V priestore je daných 15 rôznych bodov. Koľko rovín tieto body určujú, ak

- a) žiadne tri neležia v jednej rovine,
- b) práve 8 leží v jednej rovine?

a) $C_3(15) = \binom{15}{3} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = \underline{455},$

b) $C_3(15) - C_3(8) + 1 = \binom{15}{3} - \binom{8}{3} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} - \frac{8!}{5! \cdot 3!} + 1 = 455 - 56 + 1 = \underline{400}.$

55. Je daný štvorec $KLMN$. Na každej strane štvorca zvolíme 8 vnútorných bodov.

- Určte počet všetkých trojuholníkov, ktorých vrcholy ležia v daných bodoch.
- Určte počet všetkých trojuholníkov, ktorých vrcholy ležia v daných bodoch a každé dva vrcholy jedného trojuholníka ležia na rôznych stranách štvorca?

a) Ak dva vrcholy ležia na jednej strane a tretí vrchol na inej strane, máme na výber takýchto dvoch strán $C_2(4)$. Na dvoch stranách môžeme vytvoriť $8 \cdot C_2(8)$ trojuholníkov. Dokopy je takýchto trojuholníkov $8 \cdot C_2(8) \cdot C_2(4)$.

Ak sa všetky tri vrcholy nachádzajú na rôznych stranách, máme na výber troch strán $C_3(4)$ a na každých takýchto troch stranách môžeme vytvoriť 8^3 trojuholníkov.

Dokopy máme teda možností:

$$8 \cdot C_2(8) \cdot C_2(4) + C_3(4) \cdot 8^3 = 8 \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} + \binom{4}{3} \cdot 8^3 = 8 \cdot \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} + \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 8^3 =$$

$$= 8 \cdot 28 \cdot 6 + 4 \cdot 8^3 = \underline{4736}$$

b) Ak sa všetky tri vrcholy nachádzajú na rôznych stranách, máme na výber troch strán $C_3(4)$ a na každých takýchto troch stranách môžeme vytvoriť 8^3 trojuholníkov.

$$C_3(4) \cdot 8^3 = \binom{4}{3} \cdot 8^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 8^3 = 4 \cdot 8^3 = \underline{2048}$$

56. Je daná kocka $KLMNOPQR$. Na každej hrane kocky zvolíme 8 vnútorných bodov.

- a) Určte počet všetkých trojuholníkov, ktorých vrcholy ležia v daných bodoch.
- b) Určte počet všetkých trojuholníkov, ktorých vrcholy ležia v daných bodoch a navyše trojuholníky ležia na povrchu kocky?

- a)** Ak dva vrcholy ležia na jednej hrane kocky, vyberáme z dvanástich hrán dve, t.j. máme $V_2(12)$. Na týchto dvoch hranách môžeme vytvoriť $8 \cdot C_2(8)$ trojuholníkov. Spolu ich teda bude:

$$V_2(12) \cdot 8 \cdot C_2(8) = 8 \cdot \frac{12!}{10!} \cdot \frac{8!}{2!6!} = 8 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 7 = \underline{29568}$$

Ak každý vrchol trojuholníka leží na inej hrane, máme na výber týchto troch hrán $C_3(12)$ a na týchto troch hranách vytvoríme 8^3 trojuholníkov. Spolu ich

$$\text{teda bude } C_3(12) \cdot 8^3 = \frac{12!}{9!3!} \cdot 512 = \underline{112640}.$$

Dokopy bude trojuholníkov:

$$V_2(12) \cdot 8 \cdot C_2(8) + C_3(12) \cdot 8^3 = 29568 + 112640 = \underline{142208}$$

- b)** Ak vrcholy ležia na dvoch hranách, máme k jednej hrane (aby trojuholníky ležali na povrchu) šesť prislúchajúcich hrán, t.j. $12 \cdot 6 \cdot 8 \cdot C_2(8) = \underline{16128}$.

Ak vrcholy ležia na troch hranách (všetky sa nachádzajú na jednej stene kocky a stien je šesť): $6 \cdot C_3(4) \cdot 8^3 = \underline{12288}$.

$$\text{Spolu ich teda je: } 12 \cdot 6 \cdot 8 \cdot C_2(8) + 6 \cdot C_3(4) \cdot 8^3 = 16128 + 12288 = \underline{28416}$$

57. Určte počet uhlopriečok v konvexnom n -uholníku.

Počet uhlopriečok vypočítame ako počet všetkých priamok (úsečiek), určených danými n bodmi $C_2(n)$ a odpočítame n úsečiek (priamok), čo je n strán daného n -uholníka.

$$C_2(n) - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \underline{\underline{\frac{n^2 - 3n}{2}}}$$

58. V triede je 30 žiakov. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať štyroch na vyskúšanie?

Vyberáme štyroch žiakov z tridsiatich, na poradí výberu nezáleží, preto ide o kombinácie štvrtej triedy z tridsať prvkovej množiny bez opakovania:

$$C_4(30) = \frac{30!}{4!26!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 29 \cdot 7 \cdot 27 = \underline{\underline{27405}}$$

59. Na bežeckej trati beží 8 súťažiacich. Do finále postupujú prví traja. Koľko možností je na postupujúcu trojicu.

$$C_3(8) = \frac{8!}{3!5!} = 8 \cdot 7 = \underline{\underline{56}}$$

60. Koľkými spôsobmi môžeme rozdeliť 12 hráčov na dve šesťčlenné družstvá.

$$C_6(12) = \frac{12!}{6!6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 12 \cdot 11 \cdot 7 = \underline{\underline{924}}$$

61. Koľkými spôsobmi môžeme 4 dievčatá a 8 chlapcov rozdeliť na dve šesťčlenné volejbalové družstvá tak, aby v každom družstve boli dve dievčatá a štyria chlapci.

$$C_2(4) \cdot C_4(8) = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{8!}{4!4!} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = \underline{420}$$

62. Test prijímacej skúšky sa skladá z 10 otázok z chémie, z 10 otázok z biológie a z 10 otázok z fyziky. V každom predmete je vybrané z 200 navrhnutých otázok. Koľko je možností na zostavenie testu?

$$\begin{aligned} [C_{10}(200)]^3 &= \left(\frac{200!}{190!10!} \right)^3 = \left(\frac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196 \cdot 195 \cdot 194 \cdot 193 \cdot 192 \cdot 191}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right)^3 \\ &= \underline{199 \cdot 22 \cdot 197 \cdot 28 \cdot 65 \cdot 97 \cdot 193 \cdot 4 \cdot 191} \end{aligned}$$

63. Koľkými spôsobmi môžeme zo skupiny 10 dievčat a 5 chlapcov vybrať trojicu v ktorej sú dve dievčatá a jeden chlapec?

$$5 \cdot C_2(10) = 5 \cdot 45 = \underline{225}$$

64. V skupine je 20 detí, každé dve deti majú iné meno. Je medzi nimi Alena a Jana. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 8 detí tak, aby medzi vybranými

- bola Jana,
- nebola Jana,
- bola Jana aj Alena,
- bolo aspoň jedno z dievčat Alena, Jana,
- bolo najviac jedno z dievčat Alena, Jana,
- nebola ani Jana, ani Alena.

- a) $C_7(19) = \underline{50388}$
- b) $C_8(19) = \underline{75582}$,
- c) $C_6(18) = \underline{18564}$
- d) $2 \cdot C_7(18) + C_6(18) = \underline{82212}$
- e) $2 \cdot C_7(18) + C_8(18) = \underline{107406}$
- f) $C_8(18) = \underline{43758}$

65. V krabici je 10 výrobkov, z ktorých sú práve tri chybné. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 5 výrobkov tak, aby

- a) žiadny nebol chybný,
- b) práve jeden bol chybný,
- c) najviac jeden bol chybný,
- d) práve dva boli chybné,
- e) najviac dva boli chybné,
- f) aspoň dva boli chybné.

- a) $C_5(7) = \underline{21}$
- b) $3 \cdot C_4(7) = \underline{105}$
- c) $C_5(7) + 3 \cdot C_4(7) = 21 + 105 = \underline{126}$
- d) $C_3(7) \cdot C_2(3) = 35 \cdot 3 = \underline{105}$
- e) $C_3(7) \cdot C_2(3) + 3 \cdot C_4(7) + C_5(7) = 105 + 105 + 21 = \underline{231}$
- f) $C_3(7) \cdot C_2(3) + C_3(3) \cdot C_2(7) = \underline{126}$

66. Koľkými spôsobmi môžeme 20 detí rozdeliť do troch skupín tak, aby v prvej skupine bolo 10 detí, v druhej skupine bolo 6 detí a v tretej zvyšné deti?

$$C_{10}(20) \cdot C_6(10) \cdot C_4(4) = 184756 \cdot 210 \cdot 1 = \underline{38798760}$$

67. Z koľkých prvkov môžeme vytvoriť 990 kombinácií druhej triedy bez opakovania?

$$C_2(n) = 990$$

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 990$$

$$n \cdot (n-1) = 1980$$

$$n^2 - n - 1980 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1980}}{2} = \frac{1 \pm 89}{2} \Rightarrow \underline{n = 45}$$

68. Ak sa zväčší počet prvkov o 4, zväčší sa počet kombinácií druhej triedy bez opakovania vytvorených z týchto prvkov o 30. Určte pôvodný počet prvkov.

$$C_2(n+4) = C_2(n) + 30$$

$$\frac{(n+4)!}{2!(n+2)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!} + 30 \quad / \cdot 2$$

$$(n+4) \cdot (n+3) = n \cdot (n-1) + 60$$

$$n^2 + 7n + 12 = n^2 - n + 60$$

$$8n = 48$$

$$\underline{n = 6}$$

69. Ak sa zväčší počet prvkov o 15, zväčší sa počet kombinácií druhej triedy bez opakovania vytvorených z týchto prvkov trikrát. Určte pôvodný počet prvkov.

$$C_2(n+15) = 3 \cdot C_2(n)$$

$$\frac{(n+15)!}{2!(n+13)!} = 3 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$(n+15) \cdot (n+14) = 3 \cdot n \cdot (n-1)$$

$$n^2 + 29n + 210 = 3n^2 - 3n$$

$$n^2 - 16n - 105 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 420}}{2} = \frac{16 \pm 26}{2} \Rightarrow \underline{n = 21}$$

18.8 Variácie, kombinácie – rovnice.

70. Riešte rovnice a nerovnice s neznámou $x \in \mathbf{N}$:

a) $V_2(x) = 56$

d) $18 \cdot C_4(x+1) = 5 \cdot C_5(x+3)$

b) $V_x(10) = 30240$

e) $2 \cdot C_2(x-1) = 10 \cdot (x-2)$

c) $\frac{V_7(x) + V_5(x)}{V_5(x)} = 13$

f) $\frac{C_5(x) + C_6(x)}{C_4(x+1)} = \frac{2}{3}$

a) $V_2(x) = 56$, podmienka: $x \geq 2$

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 56$$

$$x \cdot (x-1) = 56$$

$$x^2 - x - 56 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 56}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2} \Rightarrow \underline{x = 8}$$

b) $V_x(10) = 30240$

$$\frac{10!}{(10-x)!} = 30240$$

$$(10-x)! = \frac{10!}{30240}$$

$$(10-x)! = 120/120 = 5!$$

$$(10-x)! = 5!$$

$$10-x = 5$$

$$\underline{x = 5}$$

c) $\frac{V_7(x) + V_5(x)}{V_5(x)} = 13$, podmienka: $x \geq 5$

$$\frac{\frac{x!}{(x-7)!} + \frac{x!}{(x-5)!}}{\frac{x!}{(x-5)!}} = 13$$

$$\frac{\frac{x!}{(x-7)!}}{\frac{x!}{(x-5)!}} + 1 = 13$$

$$\frac{(x-5)!}{(x-7)!} = 12$$

$$(x-5) \cdot (x-6) = 12$$

$$x^2 - 11x + 30 - 12 = 0$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{2} = \frac{11 \pm 7}{2} \Rightarrow \underline{x = 9}$$

d) $18 \cdot C_4(x+1) = 5 \cdot C_5(x+3)$, podmienka: $x \geq 3$

$$18 \cdot \frac{(x+1)!}{4! \cdot (x-3)!} = 5 \cdot \frac{(x+3)!}{5! \cdot (x-2)!}$$

$$18 \cdot \frac{(x+1) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot \frac{(x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x-1)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$18 \cdot (x-2) = (x+3) \cdot (x+2)$$

$$18x - 36 = x^2 + 5x + 6$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 42}}{2} = \frac{13 \pm 1}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = 7 \wedge x_2 = 6}$$

e) $2 \cdot C_2(x-1) = 10 \cdot (x-2)$, podmienka: $x \geq 3$

$$2 \cdot \frac{(x-1)!}{2! \cdot (x-3)!} = 10x - 20$$

$$(x-1) \cdot (x-2) = 10x - 20$$

$$x^2 - 3x + 2 - 10x + 20 = 0$$

$$x^2 - 13x + 22 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 22}}{2} = \frac{13 \pm 9}{2} \Rightarrow \underline{x = 11}$$

$$\text{f) } \frac{C_5(x) + C_6(x)}{C_4(x+1)} = \frac{2}{3}, \text{ podmienka: } x \geq 6$$

$$\frac{\frac{x!}{5!(x-5)!} + \frac{x!}{6!(x-6)!}}{\frac{(x+1)!}{4!(x-3)!}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x!}{5!(x-5)!} + \frac{x!}{6!(x-6)!} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x+1)!}{4!(x-3)!} \Big/ \cdot 4!$$

$$\frac{x!}{5 \cdot (x-5)!} + \frac{x!}{30 \cdot (x-6)!} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x+1)!}{(x-3)!} \Big/ \cdot 30$$

$$\frac{6 \cdot x!}{(x-5)!} + \frac{x!}{(x-6)!} = 20 \cdot \frac{(x+1)!}{(x-3)!}$$

$$6x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = \\ = 20(x+1)x(x-1)(x-2)$$

$$6 \cdot (x-3) \cdot (x-4) + (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5) = 20 \cdot (x+1)$$

$$(x-3) \cdot (x-4) \cdot (6+x-5) = 20 \cdot (x+1)$$

$$x^2 - 7x + 12 - 20 = 0$$

$$x^2 - 7x - 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x=8}}$$

18.8 Variácie, permutácie, kombinácie s opakovaním.

71. Koľko značiek Morseovej abecedy môžeme zostaviť z bodiek a čiarok, ak vytvárame skupiny z jedného až štyroch prvkov?

- pre jeden prvok: $V_1'(2) = 2^1 = 2$
- pre dva prvky: $V_2'(2) = 2^2 = 4$
- pre tri prvky: $V_3'(2) = 2^3 = 8$
- pre štyri prvky: $V_4'(2) = 2^4 = 16$
- spolu: $2 + 4 + 8 + 16 = \underline{30}$

72. Koľko päťciferných čísel môžeme zostaviť z cifier 2, 3, 4, 6, 7, 9, ak sa cifry môžu opakovať?

$$V_5'(6) = 6^5 = \underline{7776}$$

73. V krabičke je 10 farbičiek, z toho 4 rovnaké červené, 3 rovnaké modré, 2 rovnaké žlté a 1 zelená. Koľkými spôsobmi môžeme farbičky v krabičke usporiadať?

$$P'_{4,3,2,1}(10) = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = \underline{12600}$$

74. Koľkými spôsobmi môžeme kúpiť v predajni 5 zošitov, ak majú tri druhy zošitov v dostatočnom množstve?

$$C_5'(3) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \underline{21}$$

75. V cukrárni majú 5 druhov zákuskov v dostatočnom množstve, Koľkými spôsobmi si môžeme kúpiť osem zákuskov?

$$C'_8(5) = \binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = \frac{12!}{8!4!} = \underline{495}$$

18.10 Binomická veta

76. Vypočítajte:

a) $(1 + \sqrt{2})^5$

c) $(x + \sqrt{x})^4$

e) $(a^3\sqrt{a} - 3)^3$

b) $(1 - 2\sqrt[3]{3})^6$

d) $\left(y - \frac{1}{2y}\right)^5$

f) $\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)^5$

$$\begin{aligned} \text{a) } (1 + \sqrt{2})^5 &= \\ &= \binom{5}{0} \cdot 1^5 \cdot (\sqrt{2})^0 + \binom{5}{1} \cdot 1^4 \cdot (\sqrt{2})^1 + \binom{5}{2} \cdot 1^3 \cdot (\sqrt{2})^2 + \binom{5}{3} \cdot 1^2 \cdot (\sqrt{2})^3 + \\ &+ \binom{5}{4} \cdot 1^1 \cdot (\sqrt{2})^4 + \binom{5}{5} \cdot 1^0 \cdot (\sqrt{2})^5 = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + 10 \cdot 1 \cdot 2 + 10 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = \\ &= 1 + 5 \cdot \sqrt{2} + 20 + 20 \cdot \sqrt{2} + 20 + 4 \cdot \sqrt{2} = \underline{41 + 29 \cdot \sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (1 - 2\sqrt[3]{3})^6 &= \\ &= \binom{6}{0} \cdot (-2\sqrt[3]{3})^0 + \binom{6}{1} \cdot (-2\sqrt[3]{3})^1 + \binom{6}{2} \cdot (-2\sqrt[3]{3})^2 + \binom{6}{3} \cdot (-2\sqrt[3]{3})^3 + \\ &+ \binom{6}{4} \cdot (-2\sqrt[3]{3})^4 + \binom{6}{5} \cdot (-2\sqrt[3]{3})^5 + \binom{6}{6} \cdot (-2\sqrt[3]{3})^6 = \\ &= 1 - 6 \cdot 2\sqrt[3]{3} + 15 \cdot (2\sqrt[3]{3})^2 - 20 \cdot (2\sqrt[3]{3})^3 + 15 \cdot (-2\sqrt[3]{3})^4 - 6 \cdot (2\sqrt[3]{3})^5 + 1 \cdot (2\sqrt[3]{3})^6 = \\ &= 1 - 12\sqrt[3]{3} + 15 \cdot 4 \cdot (\sqrt[3]{3})^2 - 20 \cdot 8 \cdot 3 + 15 \cdot 16 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} - 6 \cdot 32 \cdot 3 \cdot (\sqrt[3]{3})^2 + 1 \cdot 64 \cdot 9 = \\ &= 1 - 12\sqrt[3]{3} + 60 \cdot (\sqrt[3]{3})^2 - 480 + 720 \cdot \sqrt[3]{3} - 576 \cdot (\sqrt[3]{3})^2 + 576 = \\ &= \underline{97 + 708 \cdot \sqrt[3]{3} - 516 \cdot \sqrt[3]{9}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (x + \sqrt{x})^4 &= \\ &= \binom{4}{0} x^4 (\sqrt{x})^0 + \binom{4}{1} x^3 (\sqrt{x})^1 + \binom{4}{2} x^2 (\sqrt{x})^2 + \binom{4}{3} x^1 (\sqrt{x})^3 + \binom{4}{4} x^0 (\sqrt{x})^4 = \\ &= 1 \cdot x^4 \cdot 1 + 4 \cdot x^3 \cdot \sqrt{x} + 6 \cdot x^2 \cdot x + 4 \cdot x \cdot x\sqrt{x} + 1 \cdot 1 \cdot x^2 = \\ &= \underline{x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot \sqrt{x} + 6 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 \cdot \sqrt{x} + x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \left(y - \frac{1}{2y}\right)^5 &= \\
&= \binom{5}{0} \cdot y^5 - \binom{5}{1} \cdot \frac{y^4}{2y} + \binom{5}{2} \cdot \frac{y^3}{4y^2} - \binom{5}{3} \cdot \frac{y^2}{8y^3} + \binom{5}{4} \cdot \frac{y}{16y^4} - \binom{5}{5} \cdot \frac{1}{32y^5} = \\
&= y^5 - 5 \cdot \frac{y^4}{2y} + 10 \cdot \frac{y^3}{4y^2} - 10 \cdot \frac{y^2}{8y^3} + 5 \cdot \frac{y}{16y^4} - \frac{1}{32y^5} = \\
&= \underline{y^5 - \frac{5}{2} \cdot y^3 + \frac{5}{2} \cdot y - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{y} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{y^3} - \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{y^5}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } (a\sqrt[3]{a} - 3)^3 &= \\
&= \binom{3}{0} \cdot a^4 - \binom{3}{1} \cdot 3 \cdot a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} + \binom{3}{2} \cdot 9 \cdot a \cdot \sqrt[3]{a} - \binom{3}{3} \cdot 27 = \\
&= \underline{a^4 - 9 \cdot a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} + 27 \cdot a \cdot \sqrt[3]{a} - 27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f) } \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - \sqrt{\frac{n}{m}}\right)^5 &= \\
&= \binom{5}{0} \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^5 \cdot \left(-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)^0 + \binom{5}{1} \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^4 \cdot \left(-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)^1 + \binom{5}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^3 \cdot \left(-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)^2 + \\
&+ \binom{5}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2 \cdot \left(-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)^3 + \binom{5}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^1 \cdot \left(-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)^4 + \binom{5}{5} \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^0 \cdot \left(-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)^5 = \\
&= 1 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot 1 - 5 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{n}{m}} + 10 \cdot \frac{m}{n} \cdot \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \frac{n}{m} - \\
&- 10 \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} \cdot \sqrt{\frac{n}{m}} + 5 \cdot \sqrt{\frac{n}{m}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 - 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{n}{m}} = \\
&= \frac{m^2}{n^2} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} - 5 \frac{m^2}{n^2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} + 10 \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} - 10 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} + 5 \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} \frac{n^2}{m^2} - \frac{n^2}{m^2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} = \\
&= \underline{\sqrt{mn} \cdot \left(\frac{m^2}{n^3} - 5 \frac{m}{n^2} + 10 \frac{1}{n} - 10 \frac{1}{m} + 5 \frac{n}{m^2} - \frac{n^2}{m^3}\right)}
\end{aligned}$$

77. Umocnite:

$$\text{a) } \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$$

$$\text{b) } \left(2a - \frac{1}{a^2}\right)^5 - \left(2a + \frac{1}{a^2}\right)^5$$

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \\ & \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \\ & \binom{4}{0} \cdot (2)^4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 + \binom{4}{1} \cdot (2)^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 + \binom{4}{2} \cdot (2)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \\ & + \binom{4}{3} \cdot (2)^1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \binom{4}{4} \cdot (2)^0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \\ & + \binom{4}{0} \cdot (2)^4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 + \binom{4}{1} \cdot (2)^3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 + \binom{4}{2} \cdot (2)^2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \\ & + \binom{4}{3} \cdot (2)^1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \binom{4}{4} \cdot (2)^0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \\ & = 2 \cdot \left[\binom{4}{0} \cdot (2)^4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 + \binom{4}{2} \cdot (2)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \binom{4}{4} \cdot (2)^0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \right] \\ & = 2 \cdot \left(1 \cdot 16 \cdot 1 + 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \right) = 2 \cdot \left(16 + 12 + \frac{1}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{113}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } & \left(2a - \frac{1}{a^2}\right)^5 - \left(2a + \frac{1}{a^2}\right)^5 = \\
& = \binom{5}{0} \cdot (2a)^5 \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right)^0 + \binom{5}{1} \cdot (2a)^4 \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right)^1 + \binom{5}{2} \cdot (2a)^3 \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right)^2 \\
& + \binom{5}{3} \cdot (2a)^2 \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right)^3 + \binom{5}{4} \cdot (2a)^1 \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right)^4 + \binom{5}{5} \cdot (2a)^0 \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right)^5 - \\
& - \left[\binom{5}{0} \cdot (2a)^5 \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^0 + \binom{5}{1} \cdot (2a)^4 \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^1 + \binom{5}{2} \cdot (2a)^3 \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 + \right. \\
& + \left. \binom{5}{3} \cdot (2a)^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^3 + \binom{5}{4} \cdot (2a)^1 \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^4 + \binom{5}{5} \cdot (2a)^0 \cdot \left(\frac{1}{a^2}\right)^5 \right] = \\
& = -2 \cdot \left(5 \cdot 16 \cdot a^4 \cdot \frac{1}{a^2} + 10 \cdot 4 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{a^6} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{a^{10}} \right) = \\
& = -2 \cdot \left(90 \cdot a^2 + 40 \cdot \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^{10}} \right)
\end{aligned}$$

78. Umocnite podľa binomickej vety a aj podľa Moivrevej vety:

$$\text{a) } (1+i)^7 \qquad \text{b) } (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6 \qquad \text{c) } (-2 + 2i\sqrt{3})^5$$

a) $(1+i)^7$

Binomická veta:

$$\begin{aligned}
(1+i)^7 &= \\
&= \binom{7}{0} \cdot (i)^0 + \binom{7}{1} \cdot (i)^1 + \binom{7}{2} \cdot (i)^2 + \binom{7}{3} \cdot (i)^3 + \binom{7}{4} \cdot (i)^4 + \\
&+ \binom{7}{5} \cdot (i)^5 + \binom{7}{6} \cdot (i)^6 + \binom{7}{7} \cdot (i)^7 = \\
&= 1 \cdot 1 + 7 \cdot i + 21 \cdot (-1) + 35 \cdot (-i) + 35 \cdot 1 + 21 \cdot i + 7 \cdot (-1) + 1 \cdot (-i) = \\
&= 1 + 7 \cdot i - 21 - 35 \cdot i + 35 + 21 \cdot i - 7 - i = \underline{\underline{8 - 8 \cdot i}}
\end{aligned}$$

Moivrova veta:

$$\begin{aligned}
(1+i)^7 &= (\sqrt{2})^7 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)^7 = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7 \cdot \pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7 \cdot \pi}{4} \right) = \\
&= 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = \underline{\underline{8 - 8 \cdot i}}
\end{aligned}$$

b) $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6$

Binomická veta:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6 &= \\ &= \binom{6}{0}(\sqrt{2})^6(-i\sqrt{2})^0 + \binom{6}{1}(\sqrt{2})^5(-i\sqrt{2})^1 + \binom{6}{2}(\sqrt{2})^4(-i\sqrt{2})^2 + \binom{6}{3}(\sqrt{2})^3 \cdot \\ &\cdot (-i\sqrt{2})^3 + \binom{6}{4}(\sqrt{2})^2(-i\sqrt{2})^4 + \binom{6}{5}(\sqrt{2})^1(-i\sqrt{2})^5 + \binom{6}{6}(\sqrt{2})^0(-i\sqrt{2})^6 = \\ &= 8 - 6 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot i - 15 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot i + \\ &+ 15 \cdot 2 \cdot 4 - 6 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot i - 8 = \\ &= 8 - 48 \cdot i - 120 + 160 \cdot i + 120 - 48 \cdot i - 8 = \underline{64 \cdot i} \end{aligned}$$

Moivrova veta:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6 &= (2)^6 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4} \right)^6 = 64 \cdot \left(\cos \frac{42\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{42\pi}{4} \right) = \\ &= 64 \cdot \left(\cos \frac{21\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{21\pi}{2} \right) = 64 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) = 64 \cdot (0 + i \cdot 1) = \underline{64 \cdot i} \end{aligned}$$

c) $(-2 + 2i\sqrt{3})^5$

Binomická veta:

$$\begin{aligned} (-2 + 2i\sqrt{3})^5 &= \\ &= \binom{5}{0} \cdot (-2)^5 (2i\sqrt{3})^0 + \binom{5}{1} \cdot (-2)^4 (2i\sqrt{3})^1 + \binom{5}{2} \cdot (-2)^3 (2i\sqrt{3})^2 + \\ &+ \binom{5}{3} \cdot (-2)^2 (2i\sqrt{3})^3 + \binom{5}{4} \cdot (-2)^1 (2i\sqrt{3})^4 + \binom{5}{5} \cdot (-2)^0 (2i\sqrt{3})^5 = \\ &= -32 + 5 \cdot 32 \cdot i \cdot \sqrt{3} + 10 \cdot 32 \cdot 3 - 10 \cdot 32 \cdot i \cdot 3\sqrt{3} - 5 \cdot 32 \cdot 9 + 1 \cdot 32 \cdot i \cdot 9\sqrt{3} = \\ &= -32 + 160\sqrt{3} \cdot i + 960 - 960\sqrt{3} \cdot i - 1440 + 288\sqrt{3} \cdot i = \underline{-512 - 512\sqrt{3} \cdot i} \end{aligned}$$

Moivrova veta:

$$\begin{aligned} (-2 + 2i\sqrt{3})^5 &= \left(\sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \right)^5 \cdot \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \cdot \sin \frac{2}{3}\pi \right)^5 = \\ &= 4^5 \cdot \left(\cos \frac{10}{3}\pi + i \cdot \sin \frac{10}{3}\pi \right) = 1024 \cdot \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \cdot \sin \frac{4}{3}\pi \right) = \\ &= 1024 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} \right) = \underline{-512 - 512\sqrt{3} \cdot i} \end{aligned}$$

79. Overte, že číslo $x = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ je koreňom rovnice $x^5 - 10x^3 - 24x - 16 = 0$.

$$\begin{aligned}
 & (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^5 - 10 \cdot (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3 - 24 \cdot (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) - 16 = 0 \\
 & \binom{5}{0}(\sqrt{2})^5(-i\sqrt{2})^0 + \binom{5}{1}(\sqrt{2})^4(-i\sqrt{2})^1 + \binom{5}{2}(\sqrt{2})^3(-i\sqrt{2})^2 + \\
 & + \binom{5}{3}(\sqrt{2})^2(-i\sqrt{2})^3 + \binom{5}{4}(\sqrt{2})^1(-i\sqrt{2})^4 + \binom{5}{5}(\sqrt{2})^0(-i\sqrt{2})^5 - \\
 & - 10 \cdot \left[(\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2(i\sqrt{2}) + 3\sqrt{2}(i\sqrt{2})^2 - (i\sqrt{2})^3 \right] - 24 \cdot (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) - 16 = 0 \\
 & 4 \cdot \sqrt{2} - 5 \cdot 4 \cdot i \cdot \sqrt{2} - 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot i + 5 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 - i \cdot 4 \cdot \sqrt{2} - \\
 & - 10 \cdot (2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 2 \cdot i \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot i) - 24 \cdot (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) - 16 = 0 \\
 & - 16\sqrt{2} - 64\sqrt{2} \cdot i + 40\sqrt{2} + 40\sqrt{2} \cdot i - 24\sqrt{2} + 24\sqrt{2} \cdot i - 16 = 0 \\
 & \underline{0 = 0}
 \end{aligned}$$

80. Koľko členov obsahuje binomický rozvoj $(1 + 2x)^{20}$?

Od 0 do 20, tzn. 21 členov.

81. Vypočítajte piaty člen binomického rozvoja $(1 + y)^{10}$.

$$A_5 = \binom{10}{4} \cdot (1)^6 \cdot (y)^4 = \frac{10!}{4!6!} \cdot 1 \cdot y^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot y^4 = \underline{210y^4}$$

82. Vypočítajte desiaty člen binomického rozvoja $(2a + b)^{15}$.

$$A_{10} = \binom{15}{9} \cdot (2a)^6 \cdot b^9 = \frac{15!}{9!6!} \cdot 64 \cdot a^6 \cdot b^9 = 5005 \cdot 64 \cdot a^6 \cdot b^9 = \underline{320320 \cdot a^6 \cdot b^9}$$

83. Určte $x \in \mathbf{R}$ tak, aby piaty člen binomického rozvoja $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9$ bol rovný 2016.

$$\binom{9}{4} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^5 \cdot (-\sqrt{x})^4 = 2016$$

$$\frac{9!}{4!5!} \cdot \frac{32}{x^5} \cdot x^2 = 2016$$

$$4032 = 2016x^3$$

$$x^3 = 2$$

$$\underline{x = \sqrt[3]{2}}$$

84. Určte $z \in \mathbf{R}$ tak, aby siedmy člen binomického rozvoja $\left(\sqrt[3]{1+z} + \sqrt[6]{1-z}\right)^9$ bol rovný 63.

$$\binom{9}{6} \cdot \left(\sqrt[3]{1+z}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[6]{1-z}\right)^6 = 63$$

$$\frac{9!}{6!3!} \cdot (1+z) \cdot (1-z) = 63$$

$$84 \cdot (1-z^2) = 63$$

$$1-z^2 = \frac{63}{84} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4} = z^2$$

$$\underline{z = \pm \frac{1}{2}}$$

85. Ktorý člen binomického rozvoja $(5-2m)^7$ obsahuje m^4 ?

$$A_5 = \binom{7}{4} \cdot 5^3 \cdot (2m)^4 = 35 \cdot 125 \cdot 16 \cdot m^4 = \underline{70000 \cdot m^4}$$

- piaty člen

86. Ktorý člen binomického rozvoja $(y^2 + y^{-1})^9$ obsahuje y^3 ?

$$A_6 = \binom{9}{5} \cdot y^8 \cdot y^{-5} = \underline{126 \cdot y^3}$$

- šiesty člen

87. Ktorý člen binomického rozvoja $\left(\frac{2}{c^2} + \sqrt{c}\right)^{12}$ obsahuje výraz $\sqrt{\frac{1}{c^3}}$?

$$A_{10} = \binom{12}{9} \cdot \left(\frac{2}{c^2}\right)^3 \cdot (\sqrt{c})^9 = 220 \cdot \frac{8}{c^6} \cdot c^4 \cdot \sqrt{c} = 1760 \cdot \frac{\sqrt{c}}{c^2} = \underline{1760 \cdot \frac{1}{\sqrt{c^3}}}$$

- desiaty člen

88. Vypočítajte taký člen binomického rozvoja, ktorý neobsahuje a :

a) $(3\sqrt{a} - a^{-2})^{10}$ b) $\left(\sqrt[4]{a^3} + \frac{1}{a\sqrt{a}}\right)^8$

a) $A_3 = \binom{10}{2} \cdot (3\sqrt{a})^8 \cdot (-a^{-2})^2 = 45 \cdot 6561 \cdot a^4 \cdot a^{-4} = \underline{295245}$

b) člen bez a neexistuje

89. V binomickom rozvoji $\left(\frac{2x^2}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^5}\right)^{14}$ nájdite člen, ktorý

- a) neobsahuje x , b) neobsahuje y .

$$\text{a) } A_5 = \binom{14}{4} \cdot \left(\frac{2x^2}{\sqrt{y}}\right)^{10} \cdot \left(\frac{\sqrt{y}}{x^5}\right)^4 = 1001 \cdot \frac{1024 \cdot x^{20}}{y^5} \cdot \frac{y^2}{x^{20}} = \underline{1025024 \cdot \frac{1}{y^3}}$$

$$\text{b) } A_8 = \binom{14}{7} \cdot \left(\frac{2x^2}{\sqrt{y}}\right)^7 \cdot \left(\frac{\sqrt{y}}{x^5}\right)^7 = 3432 \cdot \frac{128 \cdot x^{14}}{\sqrt{y^7}} \cdot \frac{\sqrt{y^7}}{x^{35}} = \underline{439296 \cdot \frac{1}{x^{21}}}$$

90. Nájdite všetky členy binomického rozvoja, ktoré sú racionálne čísla:

a) $(\sqrt{5} + 1)^6$ b) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^{11}$ c) $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$

a) bude to každý nepárny člen, t.j. 1, 3, 5 a 7. člen:

$$A_1 = \binom{6}{0} \cdot (\sqrt{5})^0 = 1 \cdot 1 = \underline{1}$$

$$A_3 = \binom{6}{2} \cdot (\sqrt{5})^2 = 15 \cdot 5 = \underline{75}$$

$$A_5 = \binom{6}{4} \cdot (\sqrt{5})^4 = 15 \cdot 25 = \underline{375}$$

$$A_7 = \binom{6}{6} \cdot (\sqrt{5})^6 = 1 \cdot 125 = \underline{125}$$

b) racionálne členy neexistujú

$$\text{c) } A_3 = \binom{14}{2} \cdot (\sqrt[3]{x})^{12} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 91 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x} = \underline{91 \cdot x^3}$$

91. Koľko racionálnych členov obsahuje binomický rozvoj?

a) $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3})^{50}$ b) $(\sqrt[6]{5} + 6 \cdot \sqrt[8]{11})^6$

a) Racionálne členy sú členy pre $n = 0, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49$:

$$A_1 = \binom{50}{0} \cdot (\sqrt{2})^{50} \cdot (-\sqrt[3]{3})^0 = 1 \cdot 2^{25} \cdot 1 = \underline{2^{25}}$$

$$A_7 = \binom{50}{6} \cdot (\sqrt{2})^{44} \cdot (-\sqrt[3]{3})^6 = \binom{50}{6} \cdot 2^{22} \cdot 3^2$$

$$A_{13} = \binom{50}{12} \cdot (\sqrt{2})^{38} \cdot (-\sqrt[3]{3})^{12} = \binom{50}{12} \cdot 2^{19} \cdot 3^4$$

$$A_{19} = \binom{50}{18} \cdot (\sqrt{2})^{32} \cdot (-\sqrt[3]{3})^{18} = \binom{50}{18} \cdot 2^{16} \cdot 3^6$$

$$A_{25} = \binom{50}{24} \cdot (\sqrt{2})^{26} \cdot (-\sqrt[3]{3})^{24} = \binom{50}{24} \cdot 2^{13} \cdot 3^8$$

$$A_{31} = \binom{50}{30} \cdot (\sqrt{2})^{20} \cdot (-\sqrt[3]{3})^{30} = \binom{50}{30} \cdot 2^{10} \cdot 3^{10}$$

$$A_{37} = \binom{50}{36} \cdot (\sqrt{2})^{14} \cdot (-\sqrt[3]{3})^{36} = \binom{50}{36} \cdot 2^7 \cdot 3^{12}$$

$$A_{43} = \binom{50}{42} \cdot (\sqrt{2})^8 \cdot (-\sqrt[3]{3})^{42} = \binom{50}{42} \cdot 2^4 \cdot 3^{14}$$

$$A_{49} = \binom{50}{48} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot (-\sqrt[3]{3})^{48} = \binom{50}{48} \cdot 2 \cdot 3^{16}$$

b) racionálne členy sú členy pre $n = 1, 25, 49$:

$$A_1 = \binom{66}{0} \cdot (\sqrt[6]{5})^{66} \cdot (\sqrt[8]{11})^0 = 1 \cdot 5^{11} \cdot 1 = \underline{5^{11}}$$

$$A_{25} = \binom{66}{24} \cdot (\sqrt[6]{5})^{42} \cdot (\sqrt[8]{11})^{24} = \binom{50}{6} \cdot 5^7 \cdot 11^3$$

$$A_{49} = \binom{66}{48} \cdot (\sqrt[6]{5})^{18} \cdot (\sqrt[8]{11})^{48} = \binom{50}{12} \cdot 5^3 \cdot 11^6$$

92. Určte $n \in \mathbf{N}$ tak, aby pre binomický rozvoj $(1+x)^n$ platilo:

- a) koeficient u tretieho člena je rovnaký ako koeficient u ôsmeho člena,
- b) koeficient u tretieho člena je 2,5 krát väčší než koeficient u šiesteho člena,
- c) pomer koeficientov u štvrtého člena a tretieho člena je 8:3,
- d) súčet koeficientov u druhého člena a tretieho člena je 55,
- e) koeficient u x^3 je 4 krát väčší než koeficient u x^2 ,
- f) koeficient u x^2 je o 152 väčší, než absolútny člen,
- g) koeficienty u druhého, tretieho a štvrtého člena tvoria aritmetickú postupnosť.

a) koeficient u tretieho člena je rovnaký ako koeficient u ôsmeho člena,

$$\begin{aligned} A_3 &= A_8 \\ \binom{n}{2} &= \binom{n}{7} \Rightarrow n = 2 + 7 \Rightarrow \underline{\underline{n = 9}} \end{aligned}$$

b) koeficient u tretieho člena je 2,5 krát väčší než koeficient u šiesteho člena,

$$\begin{aligned} A_3 &= A_6 \\ \binom{n}{2} &= 2,5 \cdot \binom{n}{5} \\ \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} &= \frac{5}{2} \cdot \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} \\ \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} &= \frac{5}{2} \\ \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} &= \frac{5}{2} \\ \frac{5!}{2!} \cdot \frac{(n-5)!}{(n-2)!} &= \frac{5}{2} \\ 4 \cdot 3 \cdot 2 &= (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \\ 4 &= n-2 \\ \underline{\underline{n = 6}} \end{aligned}$$

- c) pomer koeficientov u štvrtého člena a tretieho člena je 8 : 3,

$$\frac{A_4}{A_3} = \frac{8}{3}$$

$$\binom{n}{3} : \binom{n}{2} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{n!}{3!(n-3)!} : \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{2!}{3!} \cdot (n-2) = \frac{8}{3}$$

$$\underline{n = 10}$$

- d) súčet koeficientov u druhého člena a tretieho člena je 55,

$$A_2 + A_3 = 55$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 55$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} = 55$$

$$n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 55$$

$$2n + n \cdot (n-1) = 110$$

$$n^2 + n - 110 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 440}}{2} = \frac{-1 \pm 21}{2} \Rightarrow \underline{n = 10}$$

- e) koeficient u x^3 je 4 krát väčší než koeficient u x^2 ,

$$A_4 = 4 \cdot A_3$$

$$\binom{n}{3} = 4 \cdot \binom{n}{2}$$

$$\frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = 4 \cdot \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2}$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-3)!} = 4 \cdot \frac{3!}{2}$$

$$n-2 = 2 \cdot 6$$

$$\underline{n = 14}$$

f) koeficient u x^2 je o 152 väčší, než absolútny člen,

$$A_4 = 4 \cdot A_3$$

$$\binom{n}{2} = 152 + \binom{n}{0}$$

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} = 152 + 1$$

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} = 153$$

$$n \cdot (n-1) = 306$$

$$n^2 - n - 306 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+1224}}{2} = \frac{1 \pm 35}{2} \Rightarrow \underline{n=18}$$

g) koeficienty u druhého, tretieho a štvrtého člena tvoria aritmetickú postupnosť.

$$a_1 = \binom{n}{1}$$

$$a_2 = \binom{n}{2}$$

$$a_3 = \binom{n}{3}$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + d$$

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{2} + d$$

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1} + d \Rightarrow d = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} - \frac{n!}{(n-1)!}$$

$$\frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} + d$$

$$\frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} + \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} - \frac{n!}{(n-1)!}$$

$$\frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} - \frac{n!}{(n-1)!}$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} = n \cdot (n-1) - n$$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = 6 \cdot n \cdot (n-2)$$

$$n-1=6$$

$$\underline{n=7}$$

93. Určte $n \in \mathbf{N}$ tak, aby tretí člen binomického rozvoja $\left(\sqrt[3]{x} + x^{-1}\right)^n$ neobsahoval premennú x .

$$A_3 = \binom{n}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^{n-2} \cdot \left(x^{-1}\right)^2 = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} \cdot x^{\frac{n-2}{3}} \cdot x^{-2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} \cdot x^{\frac{n-2}{3}-2} \Rightarrow$$

$$\frac{n-2}{3} - 2 = 0$$

$$n - 2 - 6 = 0$$

$$\underline{n = 8}$$

94. Určte $n \in \mathbf{N}$ tak, aby piaty člen binomického rozvoja $\left(\frac{1}{\sqrt{z-2z}}\right)^n$ neobsahoval premennú z .

95. Určte $n \in \mathbf{N}$ tak, aby koeficient u y^8 v binomickom rozvoji $(1+2y^2)^n$ bol rovný 240.

$$\binom{n}{4} \cdot 2^4 = 240$$

$$\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!} \cdot 16 = 240$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 16 = 240$$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = 360 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$\underline{n = 6}$$

96. Určte $n \in \mathbf{N}$ tak, aby päťnásobok tretieho člena binomického rozvoja

$\left(\sqrt{2} + \frac{i}{4}\right)^n$ bol číslo opačné k osemnásobku členu piateho.

$$5 \cdot A_3 = -8 \cdot A_5$$

$$5 \cdot \binom{n}{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-2} \cdot \left(\frac{i}{4}\right)^2 = -8 \cdot \binom{n}{4} \cdot (\sqrt{2})^{n-4} \cdot \left(\frac{i}{4}\right)^4$$

$$-\frac{5}{8} \cdot \frac{(\sqrt{2})^{n-2} \cdot \left(\frac{i}{4}\right)^2}{(\sqrt{2})^{n-4} \cdot \left(\frac{i}{4}\right)^4} = \frac{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}}{\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}}$$

$$-\frac{5}{8} \cdot (\sqrt{2})^{n-2-n+4} \cdot \frac{\left(\frac{-1}{2^4}\right)}{\left(\frac{1}{2^8}\right)} = \frac{(n-2)! \cdot 2!}{(n-4)! \cdot 4!}$$

$$-\frac{5}{8} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{-2^8}{2^4} = \frac{(n-2) \cdot (n-3)}{12}$$

$$\frac{5}{8} \cdot 2 \cdot 2^4 = \frac{(n-2) \cdot (n-3)}{12}$$

$$\frac{5}{8} \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot 12 = n^2 - 5n + 6$$

$$n^2 - 5n - 234 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 234}}{2} = \frac{5 \pm 31}{2} \Rightarrow \underline{n = 18}$$

97. Určte $n \in \mathbf{N}$ tak, aby pomer koeficientov u ôsmeho členu a šestého členu v binomickom rozvoji $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^n$ bol 1:21.

$$\frac{A_8}{A_6} = \frac{1}{21}$$

$$\frac{\binom{n}{7}}{\binom{n}{5}} = \frac{1}{21}$$

$$\frac{n!}{(n-7)! \cdot 7!} = \frac{1}{21}$$

$$\frac{(n-5)! \cdot 5!}{(n-7)! \cdot 7!} = \frac{1}{21}$$

$$(n-5) \cdot (n-6) = \frac{7!}{5!} \cdot \frac{1}{21}$$

$$n^2 - 11n + 30 = 2$$

$$n^2 - 11n + 28 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 28}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{n = 7}$$

98. Použitím binomickej vety a vety Moivrevej odvod'te vzorce pre:

- a) $\sin 3x, \cos 3x$, b) $\sin 5x, \cos 5x$.

a) $\sin 3x, \cos 3x$,

$$(\cos x + i \cdot \sin x)^3 = \cos 3x + i \cdot \sin 3x$$

$$\binom{3}{0} \cdot (\cos x)^3 \cdot (i \cdot \sin x)^0 + \binom{3}{1} \cdot (\cos x)^2 \cdot (i \cdot \sin x)^1 + \binom{3}{2} \cdot (\cos x)^1 \cdot (i \cdot \sin x)^2 +$$

$$+ \binom{3}{3} \cdot (\cos x)^0 \cdot (i \cdot \sin x)^3 = \cos 3x + i \cdot \sin 3x$$

$$\cos^3 x + 3 \cdot \cos^2 x \cdot i \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x \cdot i^2 \cdot \sin^2 x + i^3 \cdot \sin^3 x = \cos 3x + i \cdot \sin 3x$$

$$\cos^3 x + 3 \cdot \cos^2 x \cdot i \cdot \sin x - 3 \cdot \cos x \cdot \sin^2 x - i \cdot \sin^3 x = \cos 3x + i \cdot \sin 3x$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cdot \cos x \cdot \sin^2 x / \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin 3x = 3 \cdot \cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x / \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cdot \cos x \cdot (1 - \cos^2 x)$$

$$\sin 3x = 3 \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \sin x - \sin^3 x$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cdot \cos x + 3 \cdot \cos^3 x$$

$$\sin 3x = 3 \cdot \sin x - 3 \cdot \sin^2 x - \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x$$

$$\sin 3x = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^2 x$$

b) $\sin 5x, \cos 5x$.

$$(\cos x + i \cdot \sin x)^5 = \cos 5x + i \cdot \sin 5x$$

$$\begin{aligned} & \binom{5}{0} \cdot (\cos x)^5 \cdot (i \cdot \sin x)^0 + \binom{5}{1} \cdot (\cos x)^4 \cdot (i \cdot \sin x)^1 + \binom{5}{2} \cdot (\cos x)^3 \cdot (i \cdot \sin x)^2 + \\ & + \binom{5}{3} \cdot (\cos x)^2 \cdot (i \cdot \sin x)^3 + \binom{5}{4} \cdot (\cos x)^1 \cdot (i \cdot \sin x)^4 + \binom{5}{5} \cdot (\cos x)^0 \cdot (i \cdot \sin x)^5 = \end{aligned}$$

$$= \cos 5x + i \cdot \sin 5x$$

$$\cos^5 x + 5 \cdot \cos^4 x \cdot i \cdot \sin x - 10 \cdot \cos^3 x \cdot \sin^2 x - 10 \cdot \cos^2 x \cdot i \cdot \sin^3 x +$$

$$+ 5 \cdot \cos x \cdot \sin^4 x + i \cdot \sin^5 x = \cos 5x + i \cdot \sin 5x$$

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cdot \cos^3 x \cdot \sin^2 x + 5 \cdot \cos x \cdot \sin^4 x$$

$$\sin 5x = 5 \cdot \cos^4 x \cdot \sin x - 10 \cdot \cos^2 x \cdot \sin^3 x + \sin^5 x$$

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cdot \cos^3 x \cdot (1 - \cos^2 x) + 5 \cdot \cos x \cdot (1 - \cos^2 x)^2$$

$$\sin 5x = 5 \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \sin x - 10 \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^3 x + \sin^5 x$$

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cdot \cos^3 x \cdot (1 - \cos^2 x) + 5 \cdot \cos x \cdot (1 - 2 \cdot \cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$\sin 5x = 5 \cdot \sin x \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 x + \sin^4 x) - 10 \cdot \sin^3 x \cdot (1 - \sin^2 x) + \sin^5 x$$

$$\cos 5x = 16 \cdot \cos^5 x - 20 \cdot \cos^3 x + 5 \cdot \cos x$$

$$\sin 5x = 16 \cdot \sin^5 x - 20 \cdot \sin^3 x + 5 \cdot \sin x$$

99. Pomocou binomickej vety dokážte, že $\forall n \in \mathbf{N}$ platí:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n,$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,$

c) $\binom{n}{0} - 2 \binom{n}{1} + 2^2 \binom{n}{2} - \dots + (-2)^n \binom{n}{n} = (-1)^n,$

d) $4^n + \binom{n}{1} 4^{n-1} + \binom{n}{2} 4^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} = 5^n,$

e) $1 + \binom{n}{1} 4 + \binom{n}{2} 4^2 + \dots + \binom{n}{n} 4^n = 5^n,$

a)
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = (1+1)^n$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

b)
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0^n = (1-1)^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} =$$

$$= \binom{n}{0} \cdot (-1)^0 + \binom{n}{1} \cdot (-1)^1 + \binom{n}{2} \cdot (-1)^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot (-1)^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

c)
$$\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - \dots + (-2)^n \binom{n}{n} = (-1)^n,$$

$$\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - \dots + (-2)^n \binom{n}{n} = (1-2)^n$$

$$\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - \dots + (-2)^n \binom{n}{n} = \binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - \dots + (-2)^n \binom{n}{n}$$

d)
$$4^n + \binom{n}{1}4^{n-1} + \binom{n}{2}4^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} = 5^n,$$

$$4^n + \binom{n}{1}4^{n-1} + \binom{n}{2}4^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} = (4+1)^n$$

$$4^n + \binom{n}{1}4^{n-1} + \binom{n}{2}4^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} = 4^n + \binom{n}{1}4^{n-1} + \binom{n}{2}4^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$\mathbf{e)} \quad 1 + \binom{n}{1}4 + \binom{n}{2}4^2 + \dots + \binom{n}{n}4^n = 5^n,$$

$$1 + \binom{n}{1}4 + \binom{n}{2}4^2 + \dots + \binom{n}{n}4^n = (1 + 4)^n$$

$$1 + \binom{n}{1}4 + \binom{n}{2}4^2 + \dots + \binom{n}{n}4^n = 1 + \binom{n}{1}4 + \binom{n}{2}4^2 + \dots + \binom{n}{n}4^n$$

100. Použitím binomickej vety dokážte, že platí:

a) $\forall n \in \mathbf{N}$ je číslo $\frac{4^{2n} - 1}{15}$ celé číslo,

b) $\forall n \in \mathbf{N}$ je číslo $4^n - 1$ deliteľné 3.

18.11 Dôkaz matematickou indukciou

101. Dokážte použitím matematickej indukcie: $\forall n \in \mathbf{N} : 6 \mid (n^3 + 5n)$

a) $\forall n \in \mathbf{N} : 6 \mid (n^3 + 5n)$

c) $\forall n \in \mathbf{N} : 4 \mid (n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n)$

b) $\forall n \in \mathbf{N} : 5 \mid (n^5 + 4n)$

d) $\forall n \in \mathbf{N} : 7 \mid (n^7 - 8n)$

102. Dokážte použitím matematickej indukcie:

a) $\forall n \in \mathbf{N} : 3 \mid (4^n + 5)$

d) $\forall n \in \mathbf{N} : 5 \mid (8^{2n} - 3^{2n})$

b) $\forall n \in \mathbf{N} : 16 \mid (9^{n+1} - 8n - 9)$

e) $\forall n \in \mathbf{N} : 5 \mid (2^{4n+3} - 3)$

c) $\forall n \in \mathbf{N} : 36 \mid (7^n - 6n - 1)$

f) $\forall n \in \mathbf{N} : 7 \mid (2^{n+2} + 3^{2n+1})$

103. Dokážte použitím matematickej indukcie:

a) $\forall n \in \mathbf{N} : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2},$

b) $\forall n \in \mathbf{N} : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2,$

c) $\forall n \in \mathbf{N} : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1},$

d) $\forall n \in \mathbf{N} : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6},$

e) $\forall n \in \mathbf{N} : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]^2,$

f) $\forall n \in \mathbf{N} : 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

104. Dokážte použitím matematickej indukcie:

a) $\forall n \in \mathbf{N} : \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2,$

b) $\forall n \in \mathbf{N} : \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1},$

c) $\forall n \in \mathbf{N} : \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3},$

d) $\forall n \in \mathbf{N} : \sum_{i=1}^n i(3i+1) = n(n+1)^2,$

105. Dokážte použitím matematickej indukcie:

$$\forall n \in \mathbf{N}: \frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{2^2} + \frac{3 \cdot 4!}{2^3} + \frac{4 \cdot 5!}{2^4} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$$

106. Dokážte použitím matematickej indukcie: $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 5: 2^n > n^2$.

107. Postupnosť je daná rekurentne: $a_1 = 3 \wedge a_n = a_{n-1} + 2n$. Dokážte, použitím matematickej indukcie správnosť vzorca pre n -tý člen $a_n = n^2 + n + 1$.

108. Dokážte použitím matematickej indukcie, že pre každé prirodzené číslo n je tiež výraz $v(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ prirodzeným číslom.

109. Použitím matematickej indukcie dokážte, že ľubovoľnú čiastku peňazí väčšiu než 4 koruny vyjadrenú v celých korunách môžeme zložiť len použitím dvojkorún a päťkorún.

110. Použitím matematickej indukcie dokážte úlohy **99a)** **99b)** a **100a)** z tejto kapitoly.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Jindra Petáková - MATEMATIKA príprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus 1998