

ARITMETICKÁ A GEOMETRICKÁ POSTUPNOSŤ

Obsah:

postupnosť, (n-tý) člen postupnosti, určenie postupnosti, rekurentný vzťah, postupnosť daná rekurentne, rastúca, klesajúca, monotónna postupnosť, maximum (minimum) postupnosti, zhora (zdola) ohraničená postupnosť, ohraničená postupnosť, graf postupnosti, aritmetická postupnosť, diferenciacia aritmetickej postupnosti, vzťahy medzi členmi postupnosti, rastúca a klesajúca aritmetická postupnosť, súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti, vzťah medzi diferenciou a monotónnosťou AP, geometrická postupnosť, kvocient geometrickej postupnosti, vzťahy medzi členmi postupnosti, rastúca a klesajúca geometrická postupnosť, súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti, monotónnosť geometrickej postupnosti, výpočet úrokov

- Dokážte, že postupnosť $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Načrtnite jej graf.
- Dokážte, že postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.
- Určte, pre ktoré čísla $k \in \mathbb{R}$ je postupnosť $\left\{\frac{kn}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, pre ktoré klesajúca. Načrtnite graf rastúcej a klesajúcej postupnosti.
- Dokážte, že v každej aritmetickej postupnosti platí vzťah $a_{k-1}^2 + 8a_k \cdot a_{k+1} = (2a_k + a_{k+1})^2$
- Dokážte, že postupnosť $\left\{\frac{2n-1}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ nie je geometrická.

Príklady:

1. Pre každé dva susedné členy postupnosti platí rovnosť $a_{n+1} = 2\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right)$. Určte prvý člen tejto postupnosti, ak jej druhý člen je $a_2 = 8$. (2)
2. Rozhodnite, od ktorého člena začínajúc platí pre postupnosť $\left\{\frac{1}{2+3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, že $|a_n| < 10^{-3}$. (333)
3. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spĺňa rekurentný vzťah $a_{n+1} = a_n - 2n + 5$. Ak $a_6 = 9$, tak $a_4 =$
(A) 1 (B) 17 (C) 19 (D) 21 (E) 25. (B)
4. Uvažujme o takejto postupnosti štvorcov: štvorec $A_2B_2C_2D_2$ má vrcholy v stredoch strán štvorca $A_1B_1C_1D_1$, štvorec $A_3B_3C_3D_3$ má vrcholy v stredoch strán štvorca $A_2B_2C_2D_2$ atď. Ak označíme O_i obvod štvorca $A_iB_iC_iD_i$, tak postupnosť $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$:
(A) je aritmetická s diferenciou $d = \frac{1}{2}$. (B) je aritmetická s diferenciou $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
(C) je geometrická s kvocientom $q = \frac{1}{2}$. (D) je geometrická s kvocientom $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
(E) nie je ani aritmetická ani geometrická
5. Medzi čísla 2 a 17 sme vložili dve čísla x a y tak, že spolu s danými číslami tvoria štyri za sebou nasledujúce členy aritmetickej postupnosti. Určte neznáme čísla x a y . Do odpovedového hárka zapíšte väčšie z nich. (12)
6. V aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 7$, $a_{11} = 10$. Určte hodnotu stého člena tejto postupnosti. (36,7)
7. Prvý člen geometrickej postupnosti je $a_1 = -0,5$. Jej štvrtý člen je $a_4 = 32$. Vypočítajte piaty člen a_5 tejto geometrickej postupnosti. (-128)

8. V krajine Hypoteland bolo 1. 1. 1999 presne 200 000 000 obyvateľov. Ročný prírastok obyvateľstva v tejto krajine je presne 2 %. Určte presný počet obyvateľov v tejto krajine k 1. 1. 2003. (216 486 432)

9. Je daná aritmetická postupnosť, v ktorej platí: súčet druhého a štvrtého člena sa rovná 16; súčet prvých desať členov sa rovná 30.

- a) vypočítajte prvý člen a diferenciu postupnosti ($a_1 = 12, d = -2$)
- b) vyjadrite túto postupnosť vzorcom pre n -tý člen ($a_n = 14 - 2n$)
- c) vyjadrite túto postupnosť rekurentne ($a_{n+1} = a_n - 2; a_1 = 12$)
- d) rozhodnite o monotónnosti postupnosti (klesajúca)
- e) vypočítajte hodnotu desiateho člena (-6)

10. Ak k číslam -15, 9, 3 pričítame to isté reálne číslo, vzniknú v tom istom poradí tri za sebou nesledujúce členy istej geometrickej postupnosti. Vypočítajte kvocient q tejto postupnosti. ($-\frac{1}{4}$)

11. a) Medzi čísla 4 a 108 vložte dve čísla tak, aby s danými tvorili geometrickú postupnosť (12; 36)

- b) vyjadrite túto postupnosť vzorcom pre n -tý člen ($a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$)
- c) vyjadrite túto postupnosť rekurentne ($a_{n+1} = 3a_n; a_1 = 4$)
- d) popíšte vlastnosti tejto postupnosti (rastúca, zdola ohraničená)
- e) vypočítajte súčet prvých desať členov tejto postupnosti (118 096)

12. Koľko prvých členov aritmetickej postupnosti, v ktorej $a_3 = 9$ a $a_7 - a_2 = 20$, treba sčítať, aby ich súčet bol a) 91, b) väčší než 1 000? (a) 7, b) 23)

13. Určte aritmetickú postupnosť, pre ktorú platí:
$$\begin{aligned} 2a_4 - a_{10} &= 8 \\ a_8 - 2a_3 - a_2 &= -4 \end{aligned} \quad . (a_1 = -1, d = -3)$$

14. Koľko existuje geometrických postupností, ktoré spĺňajú podmienku: $4a_6 = a_8$ a súčasne $a_2 + a_3 = 216$? (2)

15. Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti možno vyjadriť vzťahom $s_n = 2n^2 - n$. Vypočítajte desiaty člen tejto postupnosti. (37)

16. V posluchárni je 1 000 miest na sedenie. Tie sú usporiadané do 10 radov tak, že počty sedadiel v jednotlivých radoch tvoria aritmetickú postupnosť. V prvom rade je 46 sedadiel. Koľko sedadiel je v poslednom rade? (154)

17. Tri za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti majú súčet 39. Ak sa prostredný člen zmenší o 1, vzniknú tri za sebou idúce členy geometrickej postupnosti. Určte ich. (8, 12, 18 alebo 18, 12, 8)

18. V aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa $a_1 = 230, a_4 = 215$. Pre ktoré n sa $a_n = 0$? (47)

19. Určte diferenciu d a desiaty člen aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v ktorej $a_1 + a_3 = 2, a_2 + a_4 = 10$. ($a_1 = -3, d = 4$)

20. Všetky kladné nepárne čísla sme zoradili do rastúcej postupnosti 1, 3, 5, 7, Ktoré číslo bude v tejto postupnosti na 250-tom mieste? (499)

21. Vypočítajte súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré sú deliteľné číslom 47. (10 716)

22. V geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je štvrtý člen $a_4 = 54$ a kvocient $q = \frac{1}{3}$. Vypočítajte súčet prvých troch členov tejto postupnosti. (2106)

23. V geometrickej postupnosti je prvý člen nenulový. Súčet prvého a tretieho člena je dvojnásobok súčtu prvých troch členov tejto postupnosti. Akú hodnotu má kvocient q tejto postupnosti? (-1)

24. V geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientom q sa $a_1 = q = 5$. Určte najmenšie $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré bude platiť nerovnosť $a_n > 11\,222\,333$. (11)

25. Podiel štvrtého a prvého člena istej geometrickej postupnosti sa rovná 27. Určte kvocient tejto postupnosti. (3)